

К.Г.АСАТУР

МЕХАНИКА
ДИНАМИЧЕСКОГО
РАЗРУШЕНИЯ

Санкт-Петербург
1997

Министерство общего и профессионального образования РФ
Санкт-Петербургский государственный горный институт
имени Г.В.Плеханова (технический университет)

Без тени искусства
на добрую память
дорогим потолкам

К.Г.АСАТУР

**МЕХАНИКА ДИНАМИЧЕСКОГО
РАЗРУШЕНИЯ**

17655

Копия книги
для библиотеки

История

К.Г. АСАТУР

Санкт-Петербург
1997

Механика динамического разрушения /К.Г.Асатур. Санкт-Петербургский горный ин-т. СПб, 1997.

В книге дается метод решения задач быстропротекающего динамического разрушения твердых тел при использовании уравнений механики в совокупности с кинетической концепцией прочности.

В качестве ударной нагрузки рассмотрено воздействие тяжелого груза на элемент металлоконструкции и давления гидромониторной струи на упруго полупространственную модель горного массива.

Asatur K.G. Dynamic cracking mechanics

The book describes an original procedure for solving the problems of rapid dynamic solid destruction, using mechanics equations combined with the kinetic strength concept.

In terms of impact load is considered the action of heavy weight on metal construction element, and that of cutting jet pressure on the elastic semi-infinite model of massif.

Печатается с оригинал-макета, подготовленного автором

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
1. Основные представления проблемы контактного разрушения	6
1.1. Механика и реология в прочностной проблеме	6
1.2. Феноменологические концепции и обобщенная модель контактного разрушения	8
2. Осесимметричная задача для упругого полупространства с нагрузкой на поверхности	11
2.1. Основные уравнения	11
2.2. Контактная краевая задача при внешнем давлении	15
2.3. Решение при статической нагрузке	18
2.4. Динамическая задача	22
2.5. Напряжения при скачкообразном приложении силы	29
3. Проблема прочности и разрушения	39
3.1. Физические теории разрушения	39
3.2. Феноменологические гипотезы прочности	42
3.3. Зависимость разрушения от времени действия нагрузки	44
4. Опыты по динамическому разрушению	51
4.1. Разрушение ударным инструментом	51
4.2. Опыты по гидроотбойке	53
4.3. Интерпретация опытных данных	58
5. Динамика быстропротекающих процессов разрушения	60
5.1. Механика динамического нагружения поверхности	60

5.2. Феноменологическая модель гидроткола	64
5.3. Размерностный анализ при контактном отколе	69
5.4. Квазистатическая задача ударного разрушения балки	75
5.5. Характеристики кратковременного сопротивления разрушению	77

Библиографический список	81
---------------------------------------	-----------

1. Основное представление проблемы контактного разрушения 81

1.1. Механизмы и условия разрушения в контакте 81

1.2. Феноменологическое описание контактного и объемного разрушения 81

2.1. Основное уравнение 81

2.2. Контактная задача 81

2.3. Контактная задача 81

2.4. Контактная задача 81

2.5. Контактная задача 81

3. Проблема прочности в разрушении 81

3.1. Контактная задача 81

3.2. Контактная задача 81

3.3. Контактная задача 81

4.1. Контактная задача 81

4.2. Контактная задача 81

4.3. Контактная задача 81

5. Динамика гидротротационных процессов разрушения 81

5.1. Механизм динамического разрушения 81

ПРЕДИСЛОВИЕ

Проблема прочности и разрушения твердых тел издавна привлекала внимание многих, в том числе выдающихся, механиков и математиков.

Представление о механизме распада континуально связанных сред развивалось в контексте возникавших гипотез по мере достижений в области технического изобретательства и фундаментальных физических исследований.

В последнее время в экспериментах на феноменологическом уровне получены новые результаты по кинетике кратковременной прочности. Заслуживающим внимания в них, с точки зрения механики, являются данные о роли фактора времени при хрупком разрушении.

В данной книге дана постановка и решение тех, связанных с динамическим разрушением задач механики, в которых использование кинетической (временной) концепции прочности дает существенные результаты.

1. ОСНОВНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ КОНТАКТНОГО РАЗРУШЕНИЯ

1.1. Механика и реология в прочностной проблеме

Проблема прочности и разрушения твердых тел на практике имеет два аспекта:

- 1) надежность прочностного сопротивления конструкций действующим нагрузкам;
- 2) эффективность технологического процесса разрушения тел в контакте с обрабатывающим их инструментом.

В технологических задачах в отличие от прочностных требуется обычно быстрое преодоление сопротивляемости среды действию инструмента, обеспечение продуктивности выемочной работы. Поэтому при расчетах роль актуального показателя играет фактор времени разрушения.

Общий характер разрушения зависит от различных факторов: 1) геометрических очертаний и размеров взаимодействующих тел; 2) порядка величин воздействующих усилий; 3) свойств контактирующихся материалов, трещиноватости; 4) особенностей изменения напряженно-деформированного состояния под нагрузкой.

Внимание, уделяемое нагружению тел при разрушении, специфично для контактных задач. Они, в частности, различаются в зависимости от динамичности нагрузки, чем определяется выбор аналитического способа рассмотрения процесса взаимодействия.

Простейшим из контактных видов разрушения является статическое; при нем нагружение тела протекает медленно, вне функциональной зависимости от времени, так, что вполне допустимо полностью исключить из рассмотрения силы инерции. В итоге решение сводится к чисто статической задаче, но при разной, постепенно меняющейся нагрузке.

К статическому виду относится разрушение при резании металлов, горных пород и др. Используемые в этих условиях предельные механические характеристики определяют статические, иначе говоря минимальные в условиях технических испытаний на прочность, разрушающие усилия.

В механике выделяется также разновидность статического воздействия, характеризующаяся более быстрым, но не резко нарастающим – квазистатическим процессом нагружения. В задачах такого типа применяются связанные с именами Герца и Релея квазистатические методы решения. В них тоже отбрасываются силы инерции, но с определенным обоснованием допустимости использования статических уравнений.

Квазистатические методы применяются при изучении ударных способов воздействия. Считается, что при обычных скоростях удара усилие, передающееся на контакте при торможении ударника, в пределах точности опытных результатов растет от нуля, плавно; при разрушении – в конце, напряжения достигают максимума. Их величина близка к той, ниже которой, по представлениям предельных теорий прочности, разрушение уже невозможно. Это и есть статическая разрушающая нагрузка, принимаемая в качестве расчетной.

Наиболее общей по характеру рассмотрения является импульсивная схема нагружения, при ней процесс взаимодействия исследуется строго на основе динамических уравнений механики сплошной среды, без отбрасывания инерционных членов.

Этот метод, основанный Сен-Венаном, позволяет исследовать волновые процессы во взаимодействующих телах и их импульсивное разрушение при ударах и отбойке пород, в процессах, происходящих в толще при сейсмических явлениях и взрывах.

Для наиболее высоких относительных скоростей и усилий взаимодействия аналитическое рассмотрение допускает еще один вид упрощения: можно наоборот, по сравнению с силами инерции, пренебречь прочностными характеристиками на растяжение и сдвиг. Тогда применима гидродинамическая модель соударения, кумулятивное разрушение. Ее теория разработана М.А.Лаврентьевым [18].

Степень динамичности нагружения массивов является одной из характеристик контактного разрушения. Его изучение на этой стадии не выходит за рамки теории сплошной среды, использующей математический аппарат непрерывных функций.

Аналитическая задача требует, кроме того, выбора реологической модели для материала. Она характеризует условия напряженного состояния континуальной среды вблизи ее перехода к разрывам.

Одной из принятых в реологии моделей сплошной среды является вязкоупругое тело Максвелла, для касательных напряжений τ_0 характеризующееся соотношением типа

$$\dot{\tau}_0 = G \left[1 - Z(\gamma_0) \right] \left(\dot{\gamma}_0 - \frac{\tau_0}{\mu_0} \right), \quad (1.1-1)$$

где $\dot{\tau}_0$ – быстрота изменения напряжения во времени; G – модуль сдвига; $\dot{\gamma}_0$ – скорость деформации сдвига; $Z(\gamma_0)$ – функция нелинейности

(пластичности); μ_0 — вязкость среды; порядок величин в соотношении (1.1-1) может быть разным.

При ударных нагрузках член $\tau_0 \mu_0^{-1}$ по сравнению с производной по времени $\dot{\gamma}_0$ пренебрежимо мал и выражение (1.1-1) описывает состояние тела, близкое к упругому; при $Z(\dot{\gamma}_0) = 0$ справедлив закон Гука

$$\tau_0 = G\dot{\gamma}_0; \quad (1.1-2)$$

при $Z(\dot{\gamma}_0) \neq 0$ функция напряжения нелинейна. В случаях особенно медленного нагружения — длительного действия постоянной нагрузки — левая часть соотношения (1.1-1) близка к нулю, что приводит к закону Ньютона (для жидкостей)

$$\tau_0 = \mu_0 \dot{\gamma}_0. \quad (1.1-3)$$

Тогда в твердом теле преобладают вязкие (вязкопластические) процессы, ползучесть.

При $\dot{\gamma}_0 = 0$ в уравнении (1.1-1) поведение модели представляет собой процесс релаксации. За время релаксации напряжение, возникшее в материале вначале, при постоянной деформации падает в 2718 раз. Для горных пород время релаксации выражается тысячелетиями, для воды составляет 10^{-11} с.

Способностью проявлять как вязкопластичность, так и упругость обладают все твердые тела и жидкости, но наиболее заметно это свойство выражено у полимеров. Опытные данные подтверждают, что физическое состояние разных тел под нагрузкой — начало пластичности или разрушения — зависит от времени (продолжительности) действия возникающих в них напряжений и деформаций.

1.2. Феноменологические концепции и обобщенная модель контактного разрушения

Гипотеза континуума, вместе с классификацией физических тел по их реологическим свойствам, составляет основу феноменологической механики материальных сред.

Такая макроскопическая теория допустима с точки зрения учения о строении вещества. В физических телах оно фактически образовано из микроскопических, электрически заряженных сгущений, разделенных относительно огромными пустотами. Но в макромеханике для вещества в

объеме с размерами, взятыми много ниже пределов точности измерений, порядок числа элементарных частиц еще очень велик и тело гипотетически является плотным (сплошным).

Применение макроскопической теории позволяет избежать квантово-механического подхода, чрезвычайно усложняющего аналитическое решение задач.

Иначе обстоит дело с наступающим при нагружении кризисом – распадом твердого тела. Разрушение относится к разряду явлений неустойчивости, трудно поддающихся исследованию, не имеющих в строгом смысле слова квантово-механической интерпретации. Не существует даже связанной с переходом от межатомных расстояний к разрывам континуума нестройной границы между областями механики и физики твердого тела. В окрестности кончика трещины указанные выше условия допустимости феноменологической теории, а значит и уровень ее приближения, не выдерживаются формально.

Характерные виды разрушения различны. Оно может происходить при наличии: 1) сложного напряжения, зависящего от характера нагружения и структурных особенностей тела; 2) упругих, пластических, вязких деформаций, дилатации; 3) хаотической неоднородности среды, с прослойками и включениями; 4) значительных изменений температуры; 5) наложения предварительного искусственного или естественного напряжения среды и др.

Разрушение при таком сочетании разных условий зависит от факторов, качественно и количественно недостаточно изученных, иногда не вполне выясненных.

Все это определяет сложность проблемы, отсутствие в ней универсального подхода к исследованиям и наличие нескольких концепций прочности.

С расчетной точки зрения разрушение материалов принято разделять на хрупкое и пластическое. Хрупким (квазихрупким) оно считается, когда наибольший размер области пластичности у острия трещины мал по сравнению с ее длиной и расстоянием до границы тела.

В быстротекающих динамических процессах пластические деформации развиваются слабо, и поэтому разрушение можно считать хрупким.

При таком типе разрушения и линеаризации исходных опытных диаграмм на всей стадии нагружения допустимо применение уравнений динамики линейной теории упругости; в них характеристики разрушаемой среды, фактически нестабильные, осредняются. Это позволяет в рамках строго сформулированных допущений решать краевые задачи для уравнений рассматриваемой среды и определять поля смещений и

напряжений вплоть до достижения в кризисной зоне критического напряжения – начала прогрессирующего распада тела.

Для определения сопротивляемости тела динамическому разрушению, наряду с общепринятой “пределной” теорией, ныне используется “кинетическая” концепция прочности [14], [19]. В ней принимается, что под нагрузкой разрушение “формируется” в течение всего времени развития напряженно-деформированного состояния тела, и наступает после того, как в местах критических напряжений оказывается исчерпанным ресурс долговечности. При этом напряженно-деформированное состояние описывается динамическими, либо квазистатическими уравнениями механики, а локальный ресурс определяется условиями накопления повреждений материала и прочностной зависимостью долговечности от напряжения.

При решении задач, относящихся к выемочным работам в массивах твердых тел, обычно принимается следующая обобщенная модель контактного взаимодействия.

Динамически тело разрушается при последовательной смене обнажаемых контактных площадок. Структура разрабатываемых массивов неоднородна.

Фактические границы большинства из них в целом и на контактной поверхности имеют неправильные очертания. Протяженность всего тела и масштаб зоны концентрации напряжений, возникших от разрушающей нагрузки, отличаются друг от друга на много порядков величины.

В этих условиях, в качестве конструктивной схемы для описания динамики напряженно-деформированного состояния массива, положена осесимметричная задача для однородного упругого полупространства; массив принимается за однородную, изотропную упругую среду, континуально заполняющую часть пространства, которая ограничена бесконечной плоскостью, имеющей осесимметричную нагрузку (рис. 1).

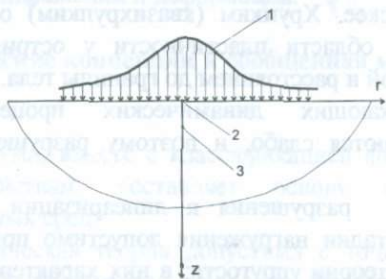


Рис. 1. Полупространственная модель массива

1 – осесимметрично распределенная нагрузка; 2 – центр нагрузки (начало координат); 3 – точка максимума наибольших касательных напряжений

2. ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С НАГРУЗКОЙ НА ПОВЕРХНОСТИ

2.1. Основные уравнения

При цилиндрической системе координат z, r, θ и симметрии относительно оси z напряженно-деформированное состояние сплошной среды в момент времени t характеризуется: а) симметричным тензором напряжений с компонентами $\sigma_z, \sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{rz}$; б) вектором смещений с составляющими u_z, u_r , который определяет симметричный тензор деформаций с компонентами, выражающимися по формулам Коши,

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}; \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}. \quad (2.1.-1)$$

Направленные по главным осям (определяющим главные плоскости в точке), три главных (нормальных) напряжения – инварианты тензора напряжений – определяются по формулам

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_z) \pm \sqrt{\frac{(\sigma_r - \sigma_z)^2}{2} + \tau_{rz}^2}, \quad \sigma_3 = \sigma_\theta. \quad (2.1.-2)$$

На плоскостях, делящих угол между главными плоскостями пополам, получаются главные касательные напряжения, из них наибольшее касательное напряжение τ равно полуразности между наибольшим и наименьшим главными напряжениями; если $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, то

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (2.1.-3)$$

Воспользовавшись для решения динамической задачи теории упругости уравнениями Ламе в пренебрежении массовыми силами, в случае осевой симметрии, в цилиндрических координатах z, r, θ , имеем

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \alpha_1 D \frac{\partial u_z}{\partial r} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial z} Du_r = \frac{\rho}{G} \alpha_1 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}; \quad (2.1-4)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} Du_r + \alpha_1 \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} = \frac{\rho}{G} \alpha_1 \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \quad (2.1-5)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}, \quad \alpha_2 = 1 - \alpha_1, \quad D = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}.$$

Входящие в состав постоянных множителей инерционных членов уравнений (2.1-4), (2.1-5) величины

$$c = \sqrt{\frac{G}{\rho \alpha_1}}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (2.1-6)$$

представляют собой скорости волн, соответственно: 1) продольной, с которой распространяются в упругой среде колебания деформаций расширения и сжатия; 2) поперечной, с которой распространяются колебания деформаций сдвига.

Для изотермического изменения состояния в однородной изотропной упругой среде согласно закону Гука

$$\sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda\varepsilon; \quad \sigma_r = 2G\varepsilon_r + \lambda\varepsilon; \\ \sigma_\theta = 2G\varepsilon_\theta + \lambda\varepsilon; \quad \tau_{rz} = G\gamma_{rz}; \quad (2.1-7)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}; \quad \lambda = \frac{2\nu G}{1-2\nu}; \quad \varepsilon = \varepsilon_z + Du_r,$$

где λ , G – коэффициенты Ламе (G – модуль упругости при сдвиге); E – модуль упругости Юнга; ν – коэффициент Пуассона; ε – объемное расширение; ρ – плотность среды.

Приравняв нулю инерционные члены в (2.1-4), (2.1-5), получим статические уравнения Ламе. Замена волновых уравнений теории упругости при изучении ударных процессов статическими связана с применением приближенного, квазистатического метода решения. В таких задачах физически допускается рассмотрение изменения состояния

тела в динамическом процессе, как непрерывной смены статических состояний.

При решении дифференциальных уравнений Ламе, как и обычно, возникает необходимость постановки дополнительных условий. Они формулируются из физических соображений, но так, чтобы: а) удовлетворить требованию единственности решения и б) не приводить к системе несовместных уравнений.

Задача Коши для динамических уравнений Ламе решается при задании начальных условий, в виде распределения в начальной момент времени, в пространстве:

а) компонентов смещения среды; б) их первых производных по времени.

В краевых задачах, к которым относится и разрушение массивов при воздействии извне, исследуемое поле занимает часть бесконечного пространства; поэтому на внешней поверхности тела необходимо также задание граничных условий. В частности, в задаче Лемба динамические уравнения Ламе решаются для полупространства, при осевой симметрии.

В тех случаях, когда решение дается с применением квазистатического метода, оно приводится к задаче Буссинеска. Ее особенность состоит в том, что в качестве статической для основных уравнений она не требует начальных условий. Но в квазистатической задаче задаваемые граничные условия должны являться функциями времени, что отличает ее от чисто статической задачи.

Система уравнений (2.1.-4) и (2.1.-5), содержащих компоненты u_z , u_r смешанно, приводится к системе, в которой функции в уравнениях разделяются. Взяв от уравнения (2.1.-5) операцию $\frac{\partial}{\partial z}$ D и подставив из (2.1.-4) значение $\frac{\partial}{\partial z} Du_r$, затем совершив над уравнением (2.1.-4) операцию $\frac{\partial^2}{\partial z} \frac{\partial}{\partial t}$ и подставив из (2.1.-5) значение $\frac{\partial^2 u_z}{\partial u \partial t}$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 u_z}{\partial z^4} + 2D \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + D \frac{\partial}{\partial t} D \frac{\partial}{\partial t} u_z = \\ = \frac{\rho}{G} \alpha_3 D' \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} - \frac{\rho^2}{G^2} \alpha_1^{-1} \frac{\partial^4 u_z}{\partial t^4}; \end{aligned} \quad (2.1.-8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 u_r}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial}{\partial r} D \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} D \frac{\partial}{\partial r} D u_r &= \\ &= \frac{\rho}{G} \alpha_3 D'' \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} - \frac{\rho^2}{G^2} \alpha_1^{-1} \frac{\partial^4 u_r}{\partial t^4}, \end{aligned} \quad (2.1.-9)$$

где

$$\alpha_3 = \alpha_2 \alpha^{-1}, \quad D' = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + D \frac{\partial}{\partial r}, \quad D'' = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} D.$$

Порядок производных в уравнениях после операций повышается на две единицы.

Другой способ расщепления функций в уравнениях Ламе основан на представлении вектора смещений в виде суммы векторов, потенциального и соленоидального; разложение имеет вид

$$u_z z + u_r r = \text{grad} \varphi + \text{rot} \psi \theta.$$

Здесь z, r, θ — координатные орты по соответствующим осям, а функции φ и ψ удовлетворяют условию

$$u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + D \psi, \quad u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (2.1.-10)$$

Подставив (2.1.-10) в (2.1.-4) и (2.1.-5), получим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}; \quad (2.1.-11)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \quad (2.1.-12)$$

Порядок производных в уравнениях остается равным двум, а в системе разделены колебания, распространяющиеся от продольных и поперечных волн; φ — представляет собой скалярный потенциал, определяющий безвихревую часть поля смещений; ψ — модуль вектора,

направленного по оси θ , который характеризует векторный потенциал этого поля и определяет его соленоидальную часть.

Расщепляемость искомых функций в уравнениях Ламе связана с независимостью друг от друга частей смещения, распространяющихся в бесконечном пространстве, с разными скоростями: c и c_1 , см. (2.1.-6). Но возникающий при этом вопрос об отделении функций уравнений, в краевой задаче в целом, в общем случае, решается отрицательно.

Это определяется тем, что граничные условия могут связывать различные части упругой волны и сами порождают взаимодействие и расщепление волн. Трехмерная задача о распространении упругих волн в ограниченном пространстве в общем виде решения не имеет.

Для задачи Лемба Релеем найдена одна, удовлетворяющая граничным условиям волна. Она слабо проникает внутрь среды и распространяется вдоль поверхности полупространства, в направлении бесконечности со скоростью

$$c_2 = \alpha_4 \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (2.1.-13)$$

Здесь α_4 находится из уравнения Релея

$$(2 - \alpha_4)^2 - 4\sqrt{1 - \alpha_4^2} \sqrt{1 - \alpha_1 \alpha_4^2} = 0,$$

в котором α_1 , см. (2.1.-6), есть функция только v ; поэтому скорость c_2 , как и c и c_1 , от длины волны не зависит, значения α_4 в функции от коэффициента Пуассона даны в [4].

2.2. Контактная краевая задача при внешнем давлении

Краевая задача теории упругости при контактном разрушении связана со стадией нагружения тела. При осевой симметрии (см. уравнения (2.1.-4), (2.1.-5)) нулевые начальные условия имеют вид

$$u_z = 0; \quad u_r = 0; \quad \dot{u}_z = 0; \quad \dot{u}_r = 0 \quad \text{при } t = 0 \quad (2.2.-1)$$

или (см. (2.1.-11), (2.1.-12))

$$\varphi = 0; \quad \psi = 0; \quad \dot{\varphi} = 0; \quad \dot{\psi} = 0 \quad \text{при } t = 0. \quad (2.2.-2)$$

Если при использовании уравнений Ламе влияние наружной поверхности на напряженно-деформированное состояние внутри тела определяется не смещениями, а напряжениями на границах рассматриваемого поля, либо теми и другими смешанно, то напряжения в граничные условия вводятся с помощью формул (2.1.-7).

Для полупространства с нагруженной поверхностью, принятой за плоскость $z = 0$, при осевой симметрии, граничные условия для напряжений имеют вид

$$(\sigma_z)_{z=0} = \frac{2G}{1-2\nu} \left[(1-\nu) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \nu D u_r \right]_{z=0} = f_1(r, t); \quad (2.2.-3)$$

$$(\tau_{rz})_{z=0} = G \left[\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right]_{z=0} = f_2(r, t), \quad (2.2.-4)$$

где f_1, f_2 — функции нагрузки.

Соотношения (2.2.-3), (2.2.-4) решаются совместно как с динамическими, так и статическими уравнениями Ламе (в квазистатической задаче). Если в функции нагрузки f_1 и f_2 аргумент t не входит, то задача будет чисто статической. Для функций потенциала (см. уравнения (2.1.-11), (2.1.-12)) условия (2.2.-3), (2.2.-4) примут вид

$$G \left[\left(\frac{1}{c_1^2} - \frac{2}{c^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 2D \frac{\partial \psi}{\partial z} \right]_{z=0} = f_1(r, t); \quad (2.2.-5)$$

$$G \left[2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} + \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right]_{z=0} = f_2(r, t). \quad (2.2.-6)$$

В динамических краевых задачах с нормальной к поверхности нагрузкой удобно пользоваться [9],[15],[22] так называемым "колокольным" соотношением

$$\sigma_z|_{z=0} = -p(r) = -\frac{P r_0 \omega_1 H(t)}{2\pi [(\omega_2 r_0)^2 + r^2]^{3/2}}, \quad (2.2.-7)$$

где $P = 2\pi r_0^2 p_0$ – сила давления на поверхность; r – расстояние от оси нагрузки; p_0 – давление по оси нагрузки; r_0 – геометрический параметр распределения нагрузки; для струи это радиус; ω_1 и ω_2 – определяются соображениями наилучшей аппроксимации, в дальнейшем считается $\omega_1 = \omega_2 = 1$.

Выражение (2.2.-7) принимает интегральную форму и позволяет переходить к другим видам нагрузки, в частности, к сосредоточенной силе. Если пренебрегать касательными силами на поверхности, то при использовании интегрального представления функции (2.2.-7) и $\omega_1 = \omega_2 = 1$, получим

$$f_1(r, t) = -\frac{P}{2\pi} H(t) \int_0^{\infty} k \exp(-kr_0) J_0(kr) dk; \quad f_2(r, t) = 0, \quad (2.2.-8)$$

где P (или p_0) и r_0 – известны из физических данных для решаемой задачи; J_0 – цилиндрическая функция первого рода порядка нуля; k – аргумент преобразования Ханкеля; $H(t)$ – единичная функция Хевисайда,

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0, \\ 1 & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

В статике функция f_1 от t не зависит и множитель $H(t)$ отсутствует.

В некоторых контактных задачах интересно оценить влияние касательных напряжений на поверхности взаимодействующих тел.

Так, напряжения трения на контактных площадках могут влиять на напряженно-деформированное состояние тел как количественно, так и качественно. Влияние сил трения может быть рассмотрено отдельно, с последующей суперпозицией, дающей полное решение. Для статической задачи, в частности при воздействии струи, приближенная функция касательных напряжений на контакте с пограничным слоем [2]

$$\tau = \omega_4 \frac{r}{(r^2 + \omega_3^2)^{3/2}} \left(\frac{\Delta}{r_0}\right)^{1/7} p_0;$$

при этом, в выражениях (2.2.-5) и (2.2.-6)

$$f_1(r) = 0;$$

$$f_2(r) = -\omega_4 \left(\frac{\Delta}{r_0}\right)^{1/7} p_0 \int_0^{\infty} k \exp(-k \omega_3 r_0) J_1(k r) dk, \quad (2.2.-9)$$

где Δ – шероховатость поверхности; J_1 – цилиндрическая функция первого рода порядка единицы; ω_3 и ω_4 – выбираются в соответствии с наилучшим приближением.

2.3. Решение при статической нагрузке

Статическая задача для упругого полупространства с граничными условиями, заданными произвольной функцией распределения давления на поверхности, решена Буссинеском [30].

В динамическом процессе при давлении, приложенном к полупространству скачком, статические напряжения устанавливаются в пределе $t = \infty$, но очень быстро, до разрушения.

Статическим может считаться также приложение нагрузки при не очень быстрых изменениях напряженно-деформированного состояния полупространства; тогда граничные условия для уравнений Ламе с нулевыми инерционными членами будут параметрическими функциями времени (квазистатический подход).

Решение статической задачи для (2.2.-7) легко выполняется методом интегральных преобразований – ищется в виде интегралов Фурье – Бесселя:

$$u_z(z, r) = \int_0^{\infty} M_1(k, z) J_0(k r) dk; \quad (2.3.-1)$$

$$u_r(z, r) = \int_0^{\infty} M_2(k, z) J_1(k r) dk, \quad (2.3.-2)$$

где $M_1(k, z)$, $M_2(k, z)$ – функции, определяющиеся в процессе решения; J_0 , J_1 – цилиндрические функции первого рода; k – аргумент преобразования Ханкеля.

Тогда, при решении, в функциях компонентов смещения u_z , u_r отделяются части, зависящие от r , и задача сводится к зависимости только от z . В уравнениях (2.1.-8), (2.1.-9) инерционные члены составляют правые части. Приравняв их нулю и сделав в уравнениях подстановку (2.3.-1), (2.3.-2), с учетом того, что

$$D J_1(k r) = k J_0(k r), \quad \frac{\partial}{\partial r} J_0(k r) = -k J_1(k r), \quad (2.3.-3)$$

после преобразований (допустимых для класса искомого, многократно дифференцируемых функций), получим

$$\frac{d^4 M_i}{dz^4} - 2k \frac{d^2 M_i}{dz^2} + k^4 M_i = 0, \quad (i = 1, 2).$$

Решив соответствующие характеристические уравнения и отбросив экспоненты от положительного аргумента (так как ищутся конечные решения), найдем

$$M_1 = (km_1 z + m_2) e^{-kz}, \quad M_2 = (km_3 + m_4) e^{-kz}.$$

Подстановка M_1 и M_2 в (2.3.-1) и (2.3.-2) дает общее решение задачи

$$u_z = \int_0^{\infty} (km_1 z + m_2) e^{-kz} J_0(k r) dk; \quad (2.3.-4)$$

$$u_r = \int_0^{\infty} (km_3 z + m_4) e^{-kz} J_1(k r) dk. \quad (2.3.-5)$$

Постоянные m_1 , m_2 , m_3 , m_4 зависят от граничных условий.

Рассматривая сначала нормальную нагрузку, подставим соотношения (2.3.-4) и (2.3.-5) в (2.1.-4), (2.1.-5), (2.2.-3), (2.2.-4), с учетом (2.2.-8) и

того, что в статической задаче $H(t) = 1$. Получим систему уравнений, решение которой дает следующее:

$$m_1 = m_3 = \frac{k e^{-k r_0}}{4\pi G} N_0; \quad m_2 = 2(1-\nu)m_3; \quad m_4 = -(1-2\nu)m_3.$$

Подстановка соотношения в (2.3.-4), (2.3.-5) после выполнения квадратур дает компоненты смещений полупространства под давлением:

$$u_z = \frac{P}{4\pi_0 G} \left[\frac{z^*(z^*+1)}{M_3 \sqrt{M_3}} + \frac{2(1-\nu)}{\sqrt{M_3}} \right];$$

$$u_r = \frac{P}{4\pi_0 G} \left[\frac{z^* r^*}{M_3 \sqrt{M_3}} - \frac{1-2\nu}{r^*} \left(1 - \frac{z^*+1}{\sqrt{M_3}} \right) \right];$$

$$\left[M_3 = (z^*+1)^2 + (r^*)^2, \quad z^* = \frac{z}{r_0}, \quad r^* = \frac{r}{r_0} \right].$$

Воспользовавшись соотношениями (2.1.-1) и (2.1.-7), найдем нормальные касательные, а с помощью (2.1.-2) и (2.1.-3) главные и наибольшие касательные напряжения τ .

При этом на оси симметрии

$$\tau = G(\varepsilon_r - \varepsilon_z) \quad (2.3.-6)$$

и с учетом (2.1.-1)

$$\tau = \frac{P_0 (7-2\nu)z^* + (1-2\nu)}{4 (z^*+1)^3}. \quad (2.3.-7)$$

Для нагрузки от одних только касательных сил на поверхности полупространства, при осевой симметрии (например, трение в пограничном слое струи), при той же подстановке выражений (2.3.-4),

(2.3.-5) в (2.1.-4), (2.1.-5), с заменой в (2.2.-3), (2.2.-4) условия (2.2.-8) на (2.2.-9), получим [2]:

$$u_z = \omega_4 \left(\frac{\Delta}{r_0} \right)^{1/7} p_0 \int_0^{\infty} [kz + (1 - 2\nu)] \exp[-k(z + \omega_3 r_0)] J_0(kr) dk;$$

$$u_r = \omega_4 \left(\frac{\Delta}{r_0} \right)^{1/7} p_0 \int_0^{\infty} [kz - (1 - 2\nu)] \exp[-k(z + \omega_3 r_0)] J_1(kr) dk.$$

Отсюда находятся напряжения, в частности, наибольшие касательные напряжения по оси $r = 0$, при трении на поверхности,

$$\tau = -\omega_4 \left(\frac{\Delta}{r_0} \right)^{1/7} p_0 \frac{(1 + \nu) \omega_3 - (2 - \nu) z^*}{2(z^* + \omega_3)^3}. \quad (2.3.-8)$$

Наибольшие (главные) касательные напряжения внутри полупространства образуют поверхность максимума, с центром симметрии на оси z , причем для нагрузки от давления струи значение максимума τ_{\max} определяется из формулы (2.3.-7) [3] при

$$z_0^* = \frac{2(1 + \nu)}{7 - 2\nu}, \quad \tau_{\max} = p_0 \frac{(7 - 2\nu)^3}{972}; \quad (2.3.-9)$$

для значения $\nu = 0,3$ получается $z_0^* = 0,40625$, $\tau_{\max} = 0,268$. Область растягивающих напряжений для давления (2.2.-7) незначительна; для напряжений σ_θ она полностью отсутствует, для напряжений σ_r находится вблизи поверхности полупространства и далеко от оси нагрузки; максимальные растягивающие напряжения $\sigma_r = 0,0056p_0$ получаются при $r^* = 5$.

Для оценки влияния трения в пограничном слое струи на разрушающие касательные напряжения внутри массива ограничимся формулой (2.3.-8). Подставив в нее значение $z^* = z_0^*$ из (2.3.-9) в точке максимума для нормальной нагрузки, получим

$$t = -\omega_4 \left(\frac{\Delta}{r_0} \right)^{1/7} P_0 \frac{(1+\nu) [7\omega_3 - 4 - 2\nu(\omega_3 - 1)] (7 - 2\nu)^2}{2 \left[2 + 7\omega_3 - 2\nu(\omega_3 - 1) \right]^3}.$$

Если, например, взять $\omega_4 = 0,98$; $\omega_3 = \sqrt{18}$; $\nu = 0,3$;
 $r_0 = 10$ мм; $\Delta = 0,5$ мм, то

$$\frac{|\tau|}{\tau_{\max}} = \frac{0,015}{0,268} = 0,056.$$

Иначе говоря, по сравнению с давлением струи влияние трения в пограничном слое на порядок меньше. С удалением от оси нагрузки влияние трения относительно возрастает, но абсолютные значения напряжений поля вдали от центра невелики и после суперпозиции не вносят вклада в процесс разрушения.

Заметим, что при использовании квазистатического приближения из рассмотрения исключается происходящий в телах при ударе реальный процесс распространения волновых колебаний. Поэтому качественной картины динамического явления полученный результат не отображает. В области с такой неопределенной границей как полупространство не дается и необходимых оценок для условий принятого приближения.

Квазистатические методы предлагались для изучения процессов хрупкого разрушения стационарными струями [17]. Но такие задачи остаются чисто статическими. Замкнутой системы динамических уравнений для квазистатического решения в случае давления струи не получено.

2.4. Динамическая задача

Решение динамической задачи теории упругости для полупространства – задачи Лемба впервые дано в работах [29] и [34].

Для решения с условием (2.2.-8) потенциальные функции в (2.1.-11), (2.1.-12) ищутся в виде интегралов Фурье - Бесселя:

$$\varphi = \int_0^{\infty} M_4(k, z, t) J_0(k r) dk;$$

$$\psi = \int_0^{\infty} M_5(k, z) J_1(k r) dk.$$

Тогда, после преобразований (в данном случае допустимых), с учетом соотношений (2.2.-3), получим:

1) основные уравнения

$$\frac{\partial^2 M_4}{\partial z^2} - k^2 M_4 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 M_4}{\partial t^2}; \quad (2.4.-1)$$

$$\frac{\partial^2 M_5}{\partial z^2} - k^2 M_5 = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 M_5}{\partial t^2}; \quad (2.4.-2)$$

2) начальные условия ($t = 0$)

$$M_4 = 0; M_5 = 0; \dot{M}_4 = 0; \dot{M}_5 = 0;$$

3) граничные условия ($z = 0$)

$$\left[\left(\frac{1}{c_1^2} - \frac{2}{c^2} \right) \frac{\partial^2 M_4}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 M_4}{\partial z^2} + 2k \frac{\partial M_5}{\partial z} \right]_{z=0} = -\frac{P}{2\pi} H(t) k e^{-k r_0}; \quad (2.4.-3)$$

$$\left[\frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 M_5}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial^2 M_5}{\partial z^2} - 2k \frac{\partial M_4}{\partial z} \right]_{z=0} = 0. \quad (2.4.-4)$$

Пользуясь далее преобразованием Лапласа, получим

$$\overline{M_4}(z, k, s) = \int_0^{\infty} M_4(z, k, t) e^{-s t} dt; \quad (2.4.-5)$$

$$\overline{M}_5(z, k, s) = \int_0^{\infty} M_5(z, k, t) e^{-st} dt; \quad (2.4.-6)$$

$$\overline{H}(s) = \int_0^{\infty} H(t) e^{-st} dt, \quad (2.4.-7)$$

где s — переменная преобразования Лапласа.

Уравнения (2.4.-1), (2.4.-2) на комплексной плоскости, при нулевых начальных условиях примут вид

$$\frac{\partial^2 \overline{M}_4}{\partial z^2} - \left(\frac{s^2}{c^2} + k^2 \right) \overline{M}_4 = 0, \quad (2.4.-8)$$

$$\frac{\partial^2 \overline{M}_5}{\partial z^2} - \left(\frac{s^2}{c_1^2} + k^2 \right) \overline{M}_5 = 0. \quad (2.4.-9)$$

Преобразование на комплексную плоскость граничных условий (2.4.-3), (2.4.-4) дает:

$$\left[\left(\frac{1}{c_1^2} - \frac{2}{c^2} \right) s^2 \overline{M}_4 + 2 \frac{d^2 \overline{M}_4}{dz^2} + 2k \frac{d\overline{M}_5}{dz} \right]_{z=0} = -\frac{P}{2\pi} \overline{H}(s) k e^{-kr_0}; \quad (2.4.-10)$$

$$\left[\frac{1}{c_1^2} \overline{M}_5 - 2 \frac{d^2 \overline{M}_5}{dz^2} - 2k \frac{d\overline{M}_4}{dz} \right]_{z=0} = 0. \quad (2.4.-11)$$

Общее решение уравнений (2.4.-8), (2.4.-9), с учетом условий на бесконечности будет иметь вид:

$$\overline{M}_4 = C_1(k, s) \exp\left(-z \sqrt{\frac{s^2}{c^2} + k^2}\right); \quad (2.4.-12)$$

$$\overline{M}_s = C_2(k, s) \exp\left(-z\sqrt{\frac{s^2}{c_1^2} + k^2}\right), \quad (2.4.-13)$$

где $C_1(k, s)$, $C_2(k, s)$ – постоянные интегрирования.

Решения для функций M_4 и M_5 получатся из (2.4.-5), (2.4.-6) с помощью формул обращения (интегралов Меллина):

$$M_4 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma - i\infty}^{\Sigma + i\infty} C_1(k, s) \exp\left(-z\sqrt{\frac{s^2}{c^2} + k^2}\right) e^{st} ds; \quad (2.4.-14)$$

$$M_5 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma - i\infty}^{\Sigma + i\infty} C_2(k, s) \exp\left(-z\sqrt{\frac{s^2}{c_1^2} + k^2}\right) e^{st} ds. \quad (2.4.-15)$$

Здесь интегрирование производится вдоль контурной прямой, параллельной мнимой оси $\Sigma > 0$.

Постоянные интегрирования $C_1(k, s)$ и $C_2(k, s)$ находятся путем подстановки (2.4.-12) и (2.4.-13) в (2.4.-10), (2.4.-11).

Поскольку в (2.2.-8) $H(t)$ – функция Хевисайда, то

$$\overline{H}(s) = \frac{1}{s}.$$

Выполнив все подстановки, окончательно придем к следующему результату [22], [25]:

$$\begin{aligned} u_z(z, r, t) &= \\ &= \frac{P}{4\pi^2 i G} \int_L \int_0^\infty \frac{g(\xi)\alpha(\xi) e^{k\varphi(\xi)} - 2\alpha(\xi) e^{k\psi(\xi)}}{\xi R(\xi)} J_0(kr) d\xi dk; \end{aligned} \quad (2.4.-16)$$

$$\begin{aligned} u_r(z, r, t) &= \\ &= \frac{P}{4\pi^2 i G} \int_L \int_0^\infty \frac{g(\xi) e^{k\varphi(\xi)} - 2\alpha(\xi)\beta(\xi) e^{k\psi(\xi)}}{\xi R(\xi)} J_1(kr) d\xi dk, \end{aligned} \quad (2.4.-17)$$

где $\xi = s(c_1 k)^{-1}$ и при любом χ функции в подынтегральных выражениях

$$g(\chi) = 2 + \chi^2, \quad \alpha(\chi) = \sqrt{1 + \gamma^2 \chi^2}, \quad \beta(\chi) = \sqrt{1 + \chi^2};$$

$$R(\chi) = [g(\chi)]^2 - 4\alpha(\chi)\beta(\chi);$$

$$\varphi(\xi) = c_1 t \xi - z \alpha(\xi) - r_0, \quad \psi(\xi) = c_1 t \xi - z \beta(\xi) - r_0, \quad \gamma = \frac{c_1}{c};$$

L — контур интегрирования $\Sigma - i\infty, \Sigma + i\infty$ на плоскости комплексного переменного ξ , пересекающий вещественную ось из нижней в верхнюю полуплоскость и расположенный правее всех особых точек подынтегрального выражения.

В этих соотношениях для u_z и u_r можно выделить статические составляющие (см. (2.3.-4), (2.3.-5)); динамические слагаемые при $t \rightarrow \infty$ стремятся к нулю. Выражения (2.4.-16), (2.4.-17) можно представить в другом виде [25] с помощью подстановки:

$$J_0(k r) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(k r \cos \vartheta) d\vartheta;$$

$$J_1(k r) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(k r \cos \vartheta) d\vartheta.$$

После перестановки порядка интегрирования и интегрирования по k комплексные интегралы в (2.4.-16), (2.4.-17) вычисляются по одному вычету в простых полюсах. Он находится по корням функций, стоящих в знаменателе подынтегральных выражений; соответствующие уравнения

$$\delta_a = c_1 t \xi - z \alpha(\xi) + i r \cos \vartheta - r_0 = 0,$$

$$\delta_b = c_1 t \xi - z \beta(\xi) + i r \cos \vartheta - r_0 = 0$$

имеют в правой полуплоскости, справа от контуров интегрирования, по одному только корню.

Выполнив преобразования, получим

$$u_z(z, r, t) = \frac{P}{2\pi^2 G} \int_0^\pi \left[\frac{g(\xi_a) \alpha(\xi_a)}{\xi_a \delta'_a R(\xi_a)} - \frac{2\alpha(\xi_b)}{\xi_b \delta'_b R(\xi_b)} \right] d\vartheta; \quad (2.4-18)$$

$$u_r(z, r, t) = -\frac{P i}{2\pi^2 G} \int_0^\pi \left[\frac{g(\xi_a)}{\xi_a \delta'_a R(\xi_a)} - \frac{2\alpha(\xi_b) \beta(\xi_b)}{\xi_b \delta'_b R(\xi_b)} \right] \cos \vartheta d\vartheta, \quad (2.4-19)$$

где

$$\xi_a = \frac{t^*(1 - i x^*) + z^* \sqrt{t^{*2} - \gamma^2(z^{*2} + x^{*2}) + \gamma^2 - 2i x^* \gamma^2}}{t^{*2} - \gamma^2 z^{*2}};$$

$$\xi_b = \frac{t^*(1 - i x^*) + z^* \sqrt{t^{*2} - z^{*2} - x^{*2} + 1 - 2i x^*}}{t^{*2} - z^{*2}};$$

$$\delta'_a = \left[t^* - \frac{\gamma^2 z^* \xi_a}{\alpha(\xi_a)} \right] r_0, \quad \delta'_b = \left[t^* - \frac{z^* \xi_b}{\beta(\xi_b)} \right] r_0;$$

$$t^* = \frac{c_1 t}{r_0}; \quad z^* = \frac{z}{r_0}; \quad r^* = \frac{r}{r_0}; \quad x^* = \frac{r}{r_0} \cos \vartheta;$$

остальные обозначения функций те же, что и в выражениях (2.4-16), (2.4-17); штрихом обозначены производные по ξ .

Из других имеющихся решений краевой задачи для уравнений (2.1-4), (2.1-5) при скачкообразном нагружении поверхности упругого полупространства давлением (2.2-7) упомянем выполненное вариационным методом И.Г.Бубнова - Б.Г.Галеркина [5]. В этом решении функции смещения представляются как суперпозиция двух решений - статического (см. (2.3-1), (2.3-2)) и динамического:

$$u_z = \frac{P_0 r_0^2}{2G} \int_0^\infty M_6(k, z, t) J_0(k r) dk;$$

$$u_r = \frac{P_0 r_0^2}{2G} \int_0^\infty M_7(k, z, t) J_1(k r) dk.$$

Начальное, нулевое состояние полупространства при этом складывается из действия на него двух, обратно направленных друг к другу, равных по величине нагрузок. При $t=0$ статическая нагрузка мгновенно снимается и функции u_z и u_r стремятся при $t \rightarrow \infty$ к нулю. Тогда граничные условия получаются нулевыми, и при $t=0$ в (2.2.-3), (2.2.-4) $f_1 = 0$, $f_2 = 0$. Этому условию удовлетворяют функции

$$M_6 = (k z + N)(1 + k m t) e^{-k \alpha} + 2 \theta_1 k z \chi e^{-k \beta} - \\ - (b_i k z + a_i) k m t \chi \exp[-k (i m t + r_0)];$$

$$M_7 = (k z + M)(1 + k m t) e^{-k \alpha} + \theta_2 k m t \chi e^{-k \beta} - \\ - (a_i k z + b_i \theta_3) k m t \chi \exp[-k (i m t + r_0)],$$

где a_i, b_i — коэффициенты (по повторяющимся значкам производится суммирование); $m = m_0 c_1$ — имеет смысл волновой скорости; m_0 — определяется условиями задачи на поверхности — из закона импульсов (см. (5.1.-4));

$$\alpha = z + m t + r_0, \quad \beta = m t + r_0, \quad \theta_1 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)};$$

$$\theta_2 = \frac{1-2\nu}{\nu}, \quad \theta_3 = \frac{1-\nu}{\nu}, \quad \chi = \exp\left(-\frac{k z^2}{m t}\right).$$

Введенная здесь функция χ и ее производные в квадранте $0 \leq z \leq \infty, 0 \leq t \leq \infty$ ограничены, в точках разрыва не определены и имеют конечные пределы. Последовательность $\exp(-i m k t)$

рассматривается как система координатных функций, что приводит к уравнениям вариационного метода

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp(-j k m t) L_1(M_6, M_7) dz dt;$$

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp(-j k m t) L_2(M_6, M_7) dz dt,$$

где L_1, L_2 — соответствующие операторы уравнений Ламе (2.1-4), (2.1-5). После интегрирования получается система алгебраических уравнений, формулы для определения коэффициентов в которых, а также сами выражения для функций смещения показаны в работе [5].

2.5. Напряжения при скачкообразном приложении сил

Для полупространства с нагрузкой от давления вида (2.2.-8) применяются соотношения (2.4.-16), (2.4.-17). В них от Γ зависят только цилиндрические функции J_0, J_1 , а от z и t только функции $\varphi(\xi)$ и $\psi(\xi)$. Поэтому компоненты вектора смещения и тензоров деформаций и напряжений по координатным осям (см. формулы (2.1.-1), (2.1.-7)), а также скорость смещения по оси Z представляются [3] слагаемыми вида

$$\Phi_1(z, \Gamma, t) = \frac{P \Gamma^m}{4\pi^2 i G} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} k^n \left[A(\xi) e^{k\varphi(\xi)} + B(\xi) e^{k\psi(\xi)} \right] J_{\mu}(k r) d\xi dk,$$

где $m = -1$ или 0 ; $n = 0$ или 1 ; $\mu = 0$ или 1 .

При разложении цилиндрических функций в ряд для $\mu = 0$ и $\mu = 1$ выражение (2.5.-2) принимает вид

$$\Phi_2 = \frac{P \Gamma^m}{4\pi^2 i G} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} k^n \left[A(\xi) e^{k\varphi(\xi)} + B(\xi) e^{k\psi(\xi)} \right] \left[1 - \frac{(kr)^2}{4} + \frac{(kr)^4}{64} - \dots \right] d\xi dk,$$

$$\Phi_3 = \frac{P \Gamma^{m-1}}{8\pi^2 i G} \int_0^\infty \int_L k^{n+1} \left[A(\xi) e^{k\varphi(\xi)} + B(\xi) e^{k\psi(\xi)} \right] \left[1 - \frac{(kr)^2}{8} + \frac{(kr)^4}{192} - \dots \right] d\xi dk$$

Функции Φ_2 и Φ_3 состоят из слагаемых вида

$$|\Phi_4(z, r, t)| = \frac{P \Gamma^{m+\lambda}}{\pi^2 i G \Gamma} \int_0^\infty \int_L k^{n+\lambda} \left[A(\xi) e^{k\varphi(\xi)} + B(\xi) e^{k\psi(\xi)} \right] d\xi dk,$$

где Γ — целое число, зависящее от члена ряда разложения, $\lambda = 0, 1, 2 \dots$

В этом соотношении подынтегральные выражения допускают перестановку порядка интегрирования. Проинтегрировав по k , найдем

$$|\Phi_4(z, r, t)| = \frac{P \Gamma^{m+\lambda}}{\pi^2 i G \Gamma} (n+\lambda)! \int_L \left[\frac{A(\xi)}{\varphi^{n+\lambda+1}} + \frac{B(\xi)}{\psi^{n+\lambda+1}} \right] d\xi.$$

Тогда в подынтегральных выражениях справа от контура интегрирования, в первом и во втором членах, получится по одному полюсу порядка $n+\lambda+1$,

$$\xi_1 = \frac{t^* + z^* \sqrt{q_1}}{q_2}, \quad \xi_2 = \frac{t^* + z^* \sqrt{q_3}}{q_4},$$

где

$$q_1 = t^{*2} - \gamma^2 z^{*2} + \gamma^2; \quad q_2 = t^{*2} - \gamma^2 z^{*2};$$

$$q_3 = t^{*2} - z^{*2} + 1; \quad q_4 = t^{*2} - z^{*2}.$$

Обозначим:

$$q_5(\xi) = \left(\frac{t^* \xi + z^* \alpha(\xi) - 1}{\xi - \xi'_1} \right)^{n+\lambda+1}; \quad q_6(\xi) = \left(\frac{t^* \xi + z^* \beta(\xi) - 1}{\xi - \xi'_2} \right)^{n+\lambda+1};$$

$$\xi'_1 = (t^* - z^* \sqrt{q_1}) q_2^{-1}; \quad \xi'_2 = (t^* - z^* \sqrt{q_3}) q_4^{-1}.$$

Дополнив контур в правой полуплоскости бесконечно большой окружностью (интегрирование по ней здесь равно нулю), согласно теореме вычетов получим

$$|\Phi_4(z, \Gamma, t)| = \frac{2P \Gamma^{m+\lambda}}{\pi \Gamma G \Gamma_0^{n+\lambda+1}} \left[\frac{A_1(\xi_1)}{q_2^{n+\lambda+1}} + \frac{B_1(\xi_2)}{q_4^{n+\lambda+1}} \right], \quad (2.5.4)$$

где

$$A_1(\xi_1) = \lim_{\xi \rightarrow \xi_1} \frac{d^{n+\lambda}}{d\xi^{n+\lambda}} [A(\xi) q_5(\xi)],$$

$$B_1(\xi_2) = \lim_{\xi \rightarrow \xi_2} \frac{d^{n+\lambda}}{d\xi^{n+\lambda}} [B(\xi) q_6(\xi)].$$

После нагружения возникшая на поверхности полупространства ($z=0$) продольная волна достигает плоскостей $z = \text{const}$ за время $t = z c^{-1}$.

На фронте этой волны компоненты смещения и их производные определяются первым членом (2.5.4), в котором $A_1(\xi_1) = \text{const}$, так как (см.(2.5.-3)) $\xi_1 = \infty$ и поэтому функции

$$A_3 = \frac{2P \Gamma^{m+\lambda} A_1(\xi_1)}{\pi \Gamma G \Gamma_0^{n+\lambda+1} q_2^{n+\lambda+1}}$$

от Z и t не зависят.

Это значит, что компоненты смещения и их производные переносятся фронтом продольной волны с сохранением величины и ее распределения в функции от Γ .

Аналогичный результат получается для определяющей вторым членом (2.5.4) поперечной волны, на фронте которой $z = c_1 t$, $\xi_2 = \infty$ и $B_1(\xi_2) = \text{const}$.

Все функции на фронтах продольной, либо поперечной волн остаются одинаковыми в плоскостях $z = \text{const}$, вплоть до $t = \infty$. Значения их на

фронте волны удобно найти в начальный момент времени $t = 0$ на плоскости $z = 0$.

Выполнив дифференцирование в выражении (2.4.-16) по t , и после подстановки $t = 0$, $z = 0$, получим

$$\dot{u}_z = \frac{P c_1}{4\pi^2 i G} \int_0^\infty \int_L \frac{\alpha(\xi)}{R(\xi)} [g(\xi) - 2] k e^{-k r_0} J_0(k r) d\xi dk.$$

Проинтегрировав по k , найдем, что скорость смещения по оси z

$$\dot{u}_z = \frac{P c_1 r_0}{4\pi^2 i G (r^2 + r_0^2)^{3/2}} \left[\int_L \frac{g(\xi) \alpha(\xi)}{R(\xi)} d\xi - \int_L \frac{2 \alpha(\xi)}{R(\xi)} d\xi \right].$$

Аналогично, продифференцировав (2.4.-16) по z , при $z = 0$, $t = 0$, получим

$$\varepsilon_z = \frac{P}{4\pi^2 i G} \int_0^\infty \int_L \frac{g(\xi) [\alpha(\xi)]^2 - 2 \alpha(\xi) \beta(\xi)}{\xi R(\xi)} k e^{-k r_0} J_0(k r) d\xi dk$$

и проинтегрировав по k , найдем деформацию по оси z

$$\varepsilon_z = - \frac{P r_0}{4\pi^2 i G (r^2 + r_0^2)^{3/2}} \left[\int_L \frac{g(\xi) [\alpha(\xi)]^2}{\xi R(\xi)} d\xi - \int_L \frac{2 \alpha(\xi) \beta(\xi)}{\xi R(\xi)} d\xi \right]$$

Подынтегральные выражения в правой полуплоскости особых точек не содержат. Поэтому после добавления контура бесконечно большой окружностью интегралы будут равны нулю. Произведем оценку интегралов, взятых по окружности (подставив $\xi = R_0 e^{i\omega}$), с учетом (2.2.-7), при $\omega_1 = \omega_2 = 1$, получим

$$\dot{u}_z = \frac{P c_1 H(t)}{2\pi i G} \lim_{R_0 \rightarrow \infty} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} i \gamma d\omega - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2 \gamma i d\omega}{R_0^2 e^{-2i\omega}} \right],$$

$$\varepsilon_z = \frac{\rho H(t)}{2\pi i G} \lim_{R_* \rightarrow \infty} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} i \gamma^2 d\omega - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2\gamma i d\omega}{R_*^2 e^{-2i\omega}} \right]$$

В этих выражениях первые интегралы определяют продольную, вторые, равные нулю, поперечную волну. Это указывает на то, что при нагрузке, характеризуемой функцией Хевисайда $H(t)$, происходит скачкообразное изменение величин \dot{u}_z и ε_z на фронте продольной волны.

Учтя теперь, что при изменении функции скачком обратное преобразование Лапласа дает половину ее значения, окончательно получим:

а) на фронте продольной волны

$$\dot{u}_z = \rho \frac{c_1 \gamma}{G} = \frac{\rho}{\rho c}, \quad (2.5-5)$$

$$\varepsilon_z = \rho \frac{\gamma^2}{G} = \frac{\rho}{\rho c^2}; \quad (2.5-6)$$

б) на фронте поперечной волны $\dot{u}_z = 0$, $\varepsilon_z = 0$.

Аналогичным образом получим, что функции u_z , u_r , ε_r , ε_θ , γ_{rz} скачков на фронтах волн не образуют. Пользуясь формулами (2.1-7), найдем, что на фронте продольной волны

$$\sigma_z = -\rho, \quad \sigma_r = \sigma_\theta = -\frac{v}{1-v} \rho, \quad \tau_{rz} = 0.$$

После прохождения фронтов волн все рассматриваемые функции, претерпевая в волновом процессе изменения, при $t \rightarrow \infty$ стремятся к своим статическим значениям [3]. Это относится к напряжениям, деформациям и смещениям, в том числе на поверхности; их непрерывные динамические изменения находятся в зависимости от значений Z и Γ .

Выполнив дифференцирование в выражениях (2.4-18), (2.4-19) и подставив $\Gamma = 0$, после интегрирования по ϑ , пользуясь также соотношениями (2.1-1), и (2.1-7), получим формулы деформации и напряжений по оси симметрии

$$\varepsilon_z = \frac{p_0}{G} \left\{ y_1 \frac{2(\alpha')^2 + \gamma^2 g_1}{\alpha' R_1 \delta_1} - \frac{\alpha' g_1}{\xi_1 R_1 \delta_1} \left[\left(\frac{1}{\xi_1} + \frac{e_1}{R_1} \right) y_1 + \frac{h_1}{\delta_1} \right] - \right. \\ \left. - \frac{2\gamma^2 y_2}{\alpha'' R_2 \delta_2} + \frac{2\alpha''}{\xi_2 R_2 \delta_2} \left[\left(\frac{1}{\xi_2} + \frac{e_2}{R_2} \right) y_2 + \frac{h_2}{\delta_2} \right] \right\}, \quad \gamma_{rz} = 0;$$

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\theta = \frac{p_0}{G} \left\{ \left[-\frac{1}{R_1 \delta_1} + \frac{g_2}{2\xi_1 R_1 \delta_1} \left(\frac{1}{\xi_1} + \frac{e_1}{R_1} + \frac{h_3}{\delta_2} \right) \right] n_1 + \right. \\ \left. + \left[\frac{\gamma^2 \beta'' (\alpha'')^{-1} + \alpha'' (\beta'')^{-1}}{R_2 \delta_2} - \frac{\alpha'' \beta''}{\xi_2 R_2 \delta_2} \left(\frac{1}{\xi_2} + \frac{e_2}{R_2} + \frac{h_4}{\delta_2} \right) \right] n_2 \right\}, \quad (2.5-7)$$

где

$$\alpha' = \alpha(\xi_1); \quad \alpha'' = \alpha(\xi_2); \quad \beta' = \beta(\xi_1);$$

$$\beta'' = \beta(\xi_2); \quad g_1 = g(\xi_1); \quad g_2 = g(\xi_2);$$

$$R_1 = R(\xi_1); \quad R_2 = R(\xi_2); \quad \delta_1 = \delta'_a(r_0)^{-1}; \quad \delta_2 = \delta'_b(r_0)^{-1};$$

$$y_1 = \frac{q_1 - \gamma^2 (z^*)^2 + \gamma^2 z^* \xi_1 \sqrt{q_1}}{q_2 \sqrt{q_1}}; \quad y_2 = \frac{q_3 - (z^*)^2 + 2z^* \xi_2 \sqrt{q_2}}{q_4 \sqrt{q_3}};$$

$$e_1 = 4\xi_1 \left(g_1 - \gamma^2 \frac{\beta'}{\alpha'} - \frac{\alpha'}{\beta'} \right); \quad e_2 = 4\xi_2 \left(g_2 - \gamma^2 \frac{\beta''}{\alpha''} - \frac{\alpha''}{\beta''} \right);$$

$$h_1 = \frac{\gamma^2}{\alpha'} \left\{ \left[\frac{\xi_1^2}{(\alpha')^2} \gamma^2 - 1 \right] z^* y_1 - \xi_1 \right\};$$

$$h_2 = \frac{1}{\beta''} \left\{ \left[\frac{\xi_2^2}{(\beta'')^2} - 1 \right] z^* y_2 - \xi_2 \right\};$$

$$h_3 = \frac{\gamma^2 z^*}{\alpha'} \left[\frac{\gamma^2 \xi_1^2}{(\alpha')^2} - 1 \right]; \quad h_4 = \frac{z^*}{\beta''} \left[\frac{\xi_2^2}{(\beta'')^2} - 1 \right];$$

$$n_1 = \frac{t^* \sqrt{q_1} + \gamma^2 z^*}{q_2 \sqrt{q_1}}; \quad n_2 = \frac{t^* \sqrt{q_3} + z^*}{q_4 \sqrt{q_3}}.$$

Таблица 1

Относительные напряжения на оси полупространства
для нагрузки (2.2.-7) при $\nu = 0,3$

$t^* = \frac{t c_1}{r_0}$	$z=0,40625 r_0, \quad r=0$				$z=0, \quad r=0$		
	$\frac{\sigma_z}{P_0}$	$\frac{\sigma_r}{P_0}$	$\frac{\sigma_\theta}{P_0}$	$\frac{\tau}{P_0}$	$\frac{\sigma_r}{P_0}$	$\frac{\sigma_\theta}{P_0}$	$\frac{\tau}{P_0}$
1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	-0,428	0,428	0,286
0,218	-1	-0,428	-0,428	0,286	-	-	-
1,0	-0,897	-0,155	-0,155	0,368	-0,776	-0,776	0,112
3,0	-0,803	-0,277	-0,277	0,263	-0,838	-0,838	0,081
10,0	-0,803	-0,277	-0,277	0,263	-0,801	-0,801	0,0995

В табл. I для $\nu = 0,3$ даны относительные значения напряжений в функции от относительного времени $t^* = t c_1 r_0^{-1}$ на оси нагрузки ($r=0$), подсчитанные по формулам (2.5.-7), (2.1.-7) для нагрузки (2.2.-7).

Для взятых точек полупространства $\tau_{rz} = 0$, а наибольшие касательные напряжения

$$\tau = 0,5 (\sigma_r - \sigma_z).$$

При значении безразмерного параметра $t^* = \infty$ ($t = \infty$) в точке $z = 0,40625 r_0$, $r = 0$, максимум имеется для напряжений $\tau = 0,263 p_0$, а в точке $z = 0$, $r = 5 r_0$ — для растягивающих напряжений $\sigma_r = 0,0053 p_0$.

Работа, совершаемая силой от нагрузки (2.2.-7) к моменту времени t ,

$$\begin{aligned} A_t &= 2\pi \int_0^{\infty} p(r) (u_z)_{z=0} r dr = \\ &= \frac{P^2 r_0}{4\pi^2 G i} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^L \frac{\xi \alpha(\xi) \exp[k(c_1 t \xi - r_0)]}{(r^2 + r_0^2)^{3/2} R(\xi)} r J_0(k r) d\xi dk dr. \end{aligned}$$

Проинтегрируем ввиду допустимости перестановки по r :

$$A_t = \frac{P^2}{4\pi^2 G i} \int_0^{\infty} \int_0^L \frac{\xi \alpha(\xi) \exp[k(c_1 t \xi - 2r_0)]}{R(\xi)} d\xi dk.$$

Проинтегрировав по k , имеем

$$A_t = \frac{P^2}{4\pi^2 G i} \int_L \frac{\xi \alpha(\xi) d\xi}{R(\xi) (c_1 t \xi - 2r_0)}.$$

Справа от контура L подынтегральное выражение имеет полюс $\xi = 2r_0 (c_1 t)^{-1}$. Добавив контур бесконечно большой окружностью, ввиду равенства нулю интеграла по ней, согласно теореме вычетов получим [4]:

$$A_t = \frac{P^2}{2\pi G} \left[\frac{\xi \alpha(\xi)}{R(\xi) c_1 t} \right]_{\xi = \frac{2r_0}{c_1 t}}$$

Работа при $t = \infty$

$$A_\infty = \frac{P^2}{4\pi G r_0 (1 - \gamma^2)} = \frac{P^2 (1 - \nu)}{4\pi G r_0}$$

в два раза больше работы, совершаемой от той же нагрузки, приложенной статически и полностью переходящей в потенциальную энергию упругой деформации полупространства, в его (новом при $t = \infty$) равновесном состоянии.

Таблица 2

Относительная работа и смещения
на оси нагрузки при $\nu = 0,3$

t^*	0.5	1.0	5.0	10.0	20
$A_t A_\infty^{-1}$	0.372	0.627	0.974	0.993	—
$u_z^0 u_c^0$	0.185	0.372	0.900	—	0.991

В табл. 2 вычислена относительная работа $A_t A_\infty^{-1}$ и относительные смещения $u_z^0 (u_c^0)^{-1}$ осевой точки поверхности (по оси Z) в функции от параметра t^* (u_c^0 — статическое смещение в точке $z = 0, r = 0$).

В табл. 2 функции $A_t A_\infty^{-1}$ стабилизируются на статических значениях при t^* , равных 8–10, а в точке $z = 0,40625 r_0, r = 0$ касательные напряжения (см. табл. 1) при t^* , равному 3–4. Смещение в центре стабилизируется (см. табл. 2) при $t^* \approx 16–20$.

В табл. 2 работа деформации при динамическом приложении нагрузки по сути полностью совершается к моменту t^* , равному 8–10. Дальнейшая работа воздействующего усилия практически равна нулю.

За время, определяемое этим значением параметра t^* , полупространству передается энергия, почти в два раза большая, чем требовалось бы при статической деформации от той же нагрузки. Избыток работы переходит в волновую энергию полупространства, теоретически

сохраняющуюся до $t = \infty$, фактически же поглощаемую сопротивлениями при колебаниях.

В статическое состояние окончательно полупространство переходит только после ее диссипации.

Заметим, что потенциальная энергия упругой системы связана с теоремой (формулой) Клапейрона [28].

Поскольку в динамических системах имеется также кинетическая энергия, в эту формулу за счет инерционных членов уравнений (2.1.-4), (2.1.-5) войдет аддитивный член, зависящий от квадрата скорости смещения среды, и энергия будет суммироваться.

Вычислим суммарную волновую энергию на фронте продольной волны по формулам (2.5.-5) и (2.5.-6) с учетом (2.1.-7), состоящую из потенциальной энергии

$$\Pi = \frac{1}{2} \sigma_z \varepsilon_z = \frac{p^2}{4G} \frac{1-2\nu}{1-\nu},$$

и кинетической энергии

$$K = \frac{1}{2} \dot{u}_z^2 = \frac{p^2}{4G} \frac{1-2\nu}{1-\nu},$$

т.е. $\Pi = K$.

Таким образом, смещения и скорость упругой среды на фронте продольной волны пропорциональны давлению p [9], а энергия – квадрату p на поверхности полупространства.

3. ПРОБЛЕМА ПРОЧНОСТИ И РАЗРУШЕНИЯ

3.1. Физические теории разрушения

Физически прочность тел зависит от связи между атомами решетки и определяется теми их электронами, которые движутся вокруг ядер на внешних орбитах. Связь может быть:

- 1) ковалентной – с прочно сцепленными электронами;
- 2) металлической – со свободно перемещающимися электронами;
- 3) промежуточной, ионной.

Между молекулами непосредственно действуют лишь слабые вандерваальсовы силы.

В рамках учения о микроструктуре вещества некоторые из феноменологических результатов имеют простое истолкование. Среди них и данные о механических свойствах твердых тел. На рис.2 дана схема сдвига верхнего слоя кристаллической решетки под действием касательного напряжения τ ; атомы нижнего ряда связаны друг с другом и неподвижны; а – в направлении, перпендикулярном скольжению; b – расстояние между атомами в направлении скольжения.

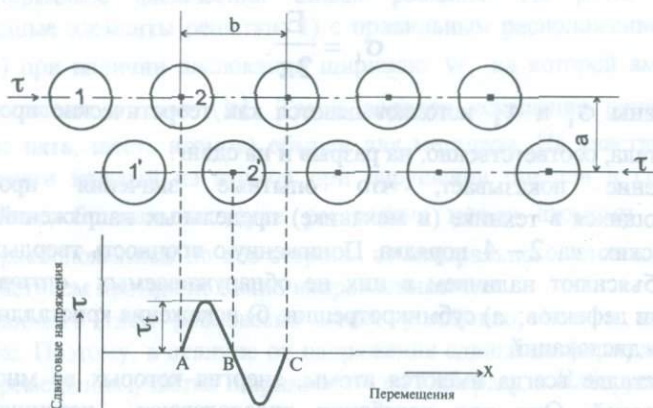


Рис.2. Касательные напряжения при сдвиге атомов

Атом 2 из одного равновесного положения А в другое С переходит через состояние неустойчивого равновесия В – в положение над атомом

2'. В процессе перемещения касательное напряжение меняется, так как является функцией положения атомов в интервале перемещения по длине b . Это приближенно записывается в виде:

$$\tau = \tau_t \sin\left(\frac{2\pi x}{b}\right),$$

где τ_t – максимальное значение касательного напряжения, которое в этом соотношении получается при $x = 0,25 b$; при малых смещениях, что соответствует условиям соблюдения закона Гука, допустима замена

$$\tau = \tau_t \frac{2\pi x}{b}$$

или, учитывая (2.1.-7),

$$\tau_t = \frac{G}{2\pi}. \quad (3.1.-1)$$

Аналогично, для нормального напряжения получается

$$\sigma_t = \frac{E}{2\pi}.$$

Величины σ_t и τ_t истолковываются как теоретические прочности твердого тела, соответственно, на разрыв и на сдвиг.

Сравнение показывает, что опытные значения прочности используемых в технике (и механике) предельных напряжений, ниже теоретических на 2–4 порядка. Пониженную прочность твердых тел в физике объясняют наличием в них не обнаруживаемых оптическими средствами дефектов: а) субмикротрещин; б) искажения кристаллической решетки – дислокаций.

В кристалле всегда имеются атомы, энергия которых во много раз выше средней. Они при колебании преодолевают потенциальный энергетический барьер и переходят в новую ячейку решетки. Испаряясь таким образом из своих узлов, они конденсируются в междоузлиях. Так образуются вакантные узлы (вакансии) и с другой стороны атомы, расположенные в междоузлиях (дислоцированные атомы). Большое количество вакансий в теле при их слиянии может приводить к возникновению трещин. В модели правильной кристаллической решетки

соседние атомы расположены в вершинах куба. Дислокацией является искажение правильной решетки. Область с сильно нарушенным порядком атомов является ядром дислокации, за пределами которого поле напряжений можно считать линейно упругим.

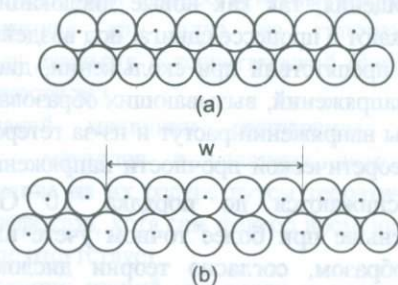


Рис.3. Дислокация с нарушением атомных рядов

Это значит, что дискретная совокупность узлов решетки может быть заменена упруго континуальной средой. Внутри ядра дислокации надо исходить из нелинейных уравнений, так как линейная теория упругости дает теряющее физический смысл решение. На рис.3 показаны двухрядные элементы решетки: 1) с правильным расположением атомов (а); 2) при наличии дислокации шириною w , на которой вместо пяти имеется шесть атомов (б). Такой порядок искажения решетки (по ширине пять, шесть атомов) обычен для металлов. На участке ширины дислокации каждый из атомов при нарушении смещен в среднем на расстояние, большее четверти расстояния между атомами ($0,25 b$), здесь, расположенные по обе стороны от центрального, атомы находятся под действием противоположно направленных сил.

Подобного типа равновесие менее устойчиво, чем в правильной решетке. Поэтому, в отличие от напряжения сдвига по формуле (3.1-1), для перемещения участка шириной w по Пайерлсу и Набарро требуется меньшее напряжение:

$$\tau = \frac{2G}{1-\nu} \exp\left(-\frac{2\pi w}{b}\right). \quad (3.1-2)$$

При таком движении общее скольжение рядов не является жестким сдвигом одной части решетки (верхних рядов) относительно другой (нижних рядов). Сдвиг распространяется по поверхности путем

последовательных перемещений возникшего нарушения равновесия, охватывая в каждый момент небольшое число атомов, по ширине дислокации. Подобное скольжение напоминает способ перемещения пресмыкающегося (змеи). В своем движении по плоскостям скольжения дислокации выходят на поверхность кристалла. Но при этом не происходит их истощения, так как новые дислокации в дополнение к естественным возникают в процессе сдвига, под воздействием нагрузки.

Скопляясь возле препятствий при скольжении, дислокации являются причиной высоких напряжений, вызывающих образование трещин в теле. Такие концентраторы напряжений растут и из-за гетерогенности строения тел. В отличие от теоретической прочности напряжения сдвига согласно формуле (3.1.-2) снижаются до порядка $10^{-4}G$. Эта величина оказывается еще меньше при более точном учете влияющих на сдвиг факторов. Таким образом, согласно теории дислокаций, предельные статические напряжения сдвига получаются ниже их технических значений, которые встречаются при медленных воздействиях и малых усилиях. Теоретически, решаются также динамические задачи движения дислокаций при больших скоростях; в пределе они не могут быть выше звуковых.

Свидетельством зависимости напряжений от микротрещин является влияние размеров тела на его прочность, получившее название масштабного фактора: с уменьшением размеров сечения вероятность наличия трещин, обуславливающих разрушение, падает и прочность возрастает, что хорошо известно из опытов.

3.2. Феноменологические гипотезы прочности

В феноменологических теориях прочности, применяющихся в тривиальных инженерных расчетах издавна, предполагалась по существу цель безусловного сохранения внутренней структуры тела ненарушенной, независимо от времени действия нагрузки.

Предпосылкой для подобного подхода к проблеме на практике является гипотеза о мгновенном, по достижении определенного предела нагрузки, наступлении распада тела, и о достаточности для содержания его в целом бездефектном состоянии, некоторого запаса прочности. В исходной основе теории лежит опытная диаграмма в координатах $\sigma - \epsilon$ (напряжение, деформация) – функция $\sigma(\epsilon)$. С ее помощью как при одноосном, так и при сложном напряжении, устанавливается момент разрушения, определяющийся пределом значений $\sigma = \sigma_c$ – функции тензора напряжений в опасной точке тела. Критические напряжения σ_c являются критериями прочности – константами материалов.

В этой концепции прочности из рассмотрения исключается происходящее до распада в макроструктуре тела накопление повреждений (трещин, скопления пор), а также отсутствует представление о ресурсе конструкции, находящейся под нагрузкой статической, либо периодически меняющейся.

Исследованием указанной макроструктуры тел занимается механика разрушения, возникшая как одна из гипотез, преодолевающих противоречия между данными о теоретической (физической) и опытной (технической) прочности тел.

Основной задачей механики разрушения является изучение трещиностойкости металлов в условиях эксплуатации машин и конструкций, и влияние на их ресурс путем теоретического обоснования методов контроля дефектов, хотя сам фактор времени – долговечность – в теории в этом случае отсутствует.

Путем использования теорий упругости и пластичности исследуется равновесное состояние тела с трещиной при статической и циклической нагрузке. Имеется ввиду, что согласно принципу Сен-Венана, возникающее под нагрузкой образование трещины ограничивается лишь локальным, в ее окрестности, перераспределением напряжений, местом их наибольшей концентрации является точечный кончик трещины, где напряжения равны бесконечности. Для условий хрупкого разрушения (малой области пластичности), с помощью линейной упругой задачи, для напряжений и деформаций в окрестности кончика трещины выведены асимптотические (с особенностью " $\varepsilon^{-0/5}$ ") соотношения. Один из множителей при сингулярности в них, является функцией, зависящей только от типа трещины (их три), другой, называемый коэффициентом интенсивности напряжений K , определяется конфигурацией тела и внешней нагрузкой (краевой задачей – напряжениями в теле); за критерии прочности (постоянные для материалов) принимаются значения коэффициентов интенсивности напряжений $K = K_c$, соответствующие моменту страгивания трещины.

Практическое значение коэффициентов интенсивности напряжений состоит в том, что с их помощью решается фундаментальная теоретическая задача сингулярности в вершине остроконечной трещины, ее устойчивости при изменении нагрузок, причем в рамках линейной теории упругости.

Другая модель механики разрушения основана на энергетическом и силовом принципах (они эквивалентны). В них энергия, затрачиваемая в вершине трещины на продвижение и увеличение ее берегов,

приравнивается освободившейся, в связи с уменьшением той, что содержится в объеме упругой деформации тела. Энергия относится к площади (длине) раскрытия G . Критерием прочности является значение $G = G_c$ в момент продвижения трещины.

Для условий, когда пластическая зона у вершины, по сравнению с ее длиной, велика, применяется нелинейная механика. В одной из таких моделей считается, что кончик трещины затупляется, образуя пластическую зону, толщина которой δ в пределе равновесия является критерием прочности (константой материала) δ_c . В механике разрушения принята также нелинейная модель, связанная с инвариантным интегралом I , предельное значение $I = I_c$ которого соответствует моменту продвижения трещины. Криволинейный интеграл I определяет энергию, отнесенную к длине приращения трещины, и берется по контуру, охватывающему ее вершину внутри тела [32].

Основное развитие механика разрушения получила в задачах для плоско напряженного тела и для условий квазистатического изменения нагрузки [24].

При динамических изменениях (колебаниях) нагрузки в прочностных задачах исходят из того, что с увеличением скорости нагружения зона пластичности в трещине сокращается. Это обеспечивает возможность использования линейной механики при более высоких разрушающих напряжениях, как и в механике разрушения; значения σ_c и K_c заменяются на более высокие, динамические σ_d и K_d , которые ставятся в зависимость от скорости нагружения.

3.3. Зависимость разрушения от времени действия нагрузки

Теории прочности, включающие фактор времени разрушения, в отличие от "предельных", приведенных выше в разделе 3.1., дают оценки долговечности еще на стадии проектирования и изготовления конструкций, а также обеспечивают расчеты технологических процессов выемки и обработки материалов. Процессы разрушения, протекающие в функции от времени t , ползучесть, усталость металлов при циклических нагрузках и пр. являются предметом механики повреждений. При изучении ползучести опытные диаграммы – функции $\varepsilon(t)$, снятые при постоянном напряжении σ , фиксируют время разрыва образца – конец длительной прочности, т.е. долговечность T , и позволяют построить график функции скорости ползучести $\dot{\varepsilon}(t)$. Снятие диаграмм $\varepsilon(t)$ при

разных нагрузках (напряжениях) дает зависимость долговечности от напряжения – функцию $T(\sigma)$.

По результатам эмпирических данных для условий длительной прочности получены зависимости в виде

$$T = \alpha e^{-\beta\sigma}, \quad (3.2.-1)$$

$$\dot{\epsilon} T = C, \quad (3.2.-2)$$

где α, β, C - опытные константы [16].

Кратковременная прочность (хрупкое разрушение) изучалась в работах [11],[14], [26] путем сопоставления данных теории с аппроксимированными результатами опытов для железа, бетона, полимеров и др. В основу кинетической (временной, флуктуационной) концепции прочности положена формула С.Н.Журкова:

$$\ln T = A - B\sigma, \quad (3.2.-3)$$

где

$$A = \ln T_0 + \frac{U_0}{R\theta}; \quad B = \frac{\gamma_w}{R\theta}; \quad (3.2.-4)$$

T_0 – период тепловых флуктуаций; U_0 – начальная энергия активации разрушения; γ_w – коэффициент активационного объема; σ – напряжение; θ – термодинамическая температура; $R = k N$ - универсальная газовая постоянная (k – постоянная Больцмана; N – число Авогадро). Принимается, что $T_0 = 10^{-14} - 10^{-13}$ с; $R = 8,3$ Дж/град.моль.

Согласно кинетической концепции прочности, механизм разрушения представляется как разрыв связей в теле, происходящий время от времени, под действием тепловых колебаний атомов, с периодом T_0 . Вероятность возникновения таких разрывов находится в прямой зависимости от высоты активационного барьера $U - \gamma_w \sigma$, в обратной зависимости от температуры тела θ . При отсутствии напряжений ($\sigma = 0$) энергия U_0 , необходимая для разрыва, равна энергии самой связи между атомами. В частности, при растяжении, для одновременного разрыва связи на единичной поверхности тела требуется испарение с нее

одного молекулярного слоя. Отсюда U_0 равна энергии (теплоте) сублимации.

В случае же действия касательных напряжений деформации больше, чем при растяжении, например, в обычных соотношениях соответствующих модулей упругости.

Это приводит к большему количеству вакансий в опытном образце, интенсифицирующих диффузию, и поэтому U_0 приближается к энергии самодиффузии. При нагружении тела, с появлением напряжений энергия $U_0 - \gamma_w \sigma$ становится меньше U_0 . Поэтому вероятность концентрации разорванных связей и слияния субмикроскопических областей ускоряется, что приводит к развитию трещин.

В опытах по определению долговечности, в отличие от испытаний для снятия диаграмм $\sigma \div \epsilon$, нагрузка (напряжение) при росте деформации до разрушения (исключая неизбежную начальную нестационарность) остается постоянной. Практические кинетические диаграммы строятся при $\theta = \text{const}$; на них все точки характеризуют разрушение образца. В каждой из них долговечность $T(\sigma)$ и обратная ей величина – повреждаемость $[T(\sigma)]^{-1}$ являются функциями постоянного по величине напряжения $\sigma = \text{const}$, приложенного к телу.

Для определения долговечности в случае переменного напряжения (нагрузки) пользуются этими же данными. Тогда каждому значению напряжения $\sigma(t)$ будет отвечать некоторая величина мгновенной повреждаемости $\{T[\sigma(t)]\}^{-1}$. В результате, в предположении, что процесс разрушения необратим и непрерывен, получается интеграл накапливаемости относительных долговечностей Бейли

$$\int_0^T \frac{dt}{T[\sigma(t)]} = 1. \quad (3.2.-5)$$

Этот интеграл определяет величину долговечности T^* при переменном напряжении $\sigma(t)$.

Сделав подстановку (3.2.-3) в (3.2.-5), получим

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{dt}{\exp[A_1 - B\sigma(t)]} = 1, \quad (3.2.-6)$$

где, согласно (3.2.-4)

$$A_1 = \frac{U_0}{R\theta}.$$

Из (3.2.-2) следует, что функция $\dot{\epsilon}(\sigma)$ имеет вид, обратный $T(\sigma)$. Кроме того, произведение (3.2.-2) можно считать эквивалентным соотношению для конечной деформации образца ϵ_c на установившейся стадии ползучести, т.е.

$$\epsilon_c = \text{const.}$$

Отсюда делается предположение, что деформация при разрушении не зависит от напряжения. Заметим, что в [14] отмечалась трудная совместимость предельной и кинетической концепций прочности; рассмотрим этот вопрос на примере опытных данных с помощью формулы (3.2.-3) [7].

Таблица 3

Долговечность железа (α) при растяжении

T, с	σ или σ^* , МПа	T^* , с
1	2	3
0.1	335	11.4
1	330	112.5
10	324	1100.0

В табл. 3 приведен расчет для железа (α) при растяжении [26], выполненный по формуле (3.2.-3), при $\theta = 300 \text{ K}$, $U_0 = 3,6 \cdot 10^5 \text{ Дж/моль}$, $\gamma_w = 8,5 \cdot 10^2 \text{ Дж/(моль.МПа)}$.

Напряжения σ (в столбце 2) близки в предельной концепции прочности к критическим для железа. Изменение долговечности в широких пределах (от 0,1 до 10 с) влияет на эти разрушающие напряжения слабо, они отклоняются от некоторого среднего значения на величину не более, чем 2%. В этой связи возникает аналогичный вопрос о влиянии на прочность, продолжительности постепенного нагружения образцов при испытаниях, проводимых для получения диаграмм деформация – напряжение ($\epsilon = \sigma$).

Ввиду того, что в таких испытаниях нагрузка возрастает от нуля, непрерывно и необратимо, можно воспользоваться критерием Бейли (3.2.-5), приняв приближенно, что напряжение меняется линейно:

$$\sigma(t) = \chi t. \quad (3.2.-7)$$

Сделав подстановку в (3.2.-6) и проинтегрировав, получим

$$B^* \chi T_0 = \exp(-A^*) \left[\exp(B^* \chi T^*) - 1 \right],$$

где T^* — время нарастания нагрузки на образец до момента разрушения.

Учтя, что $\exp(B^* \chi T^*) \gg 1$, получим

$$B^* \chi T_0 \approx \exp(B^* \chi T^* - A^*).$$

Задав константу в (3.2.-7) в виде

$$\chi = \frac{\sigma^*}{T^*},$$

где σ^* — напряжение в момент разрушения, найдем

$$T^* = \frac{\gamma_w}{R\theta} \sigma^* T_0 \exp \frac{U_0 - \gamma_w \sigma^*}{R\theta}$$

или

$$T^* = \frac{\gamma_w}{R\theta} \sigma^*, \quad (3.2.-8)$$

где T — долговечность; при постоянном напряжении $\sigma = \sigma^*$.

В табл. 3 (столбец 3) даны значения T^* , подсчитанные для взятых из той же таблицы напряжений $\sigma = \sigma^*$. Из нее видно, что время развития T^* предельных напряжений σ^* в опытах при монотонно возрастающей

нагрузке на два порядка выше, чем T , необходимое для разрушения при постоянном напряжении с тем же значением σ .

Если напряжения σ^* в табл. 3 рассматривать как опытные данные для диаграммы $\sigma - \varepsilon$, то они отклоняются от среднего на величину, лежащую в промежутке точности измерений; в то же время продолжительность нагружения образца изменялась в границах весьма длительного интервала от 11,4 до 1100 с, заключающему с большой степенью вероятности внутри себя обычное время проведения опытов. Близость значений σ^* , при сильно отличающемся друг от друга времени нагружения, указывает на трудность обнаружения функции $T(\sigma^*)$ при испытаниях по снятию диаграмм $\sigma - \varepsilon$; в этих условиях создается представление об опытном подтверждении существования единственного, предельного разрушающего напряжения, независимого от времени, которое не укладывается в рамки кинетической концепции.

Включение временного фактора в критически напряженное состояние обобщает теорию прочности. При условии постоянства модуля упругости E , его независимости от скорости деформации, критическая область на диаграмме $\sigma - \varepsilon$, переходя от предельной точки, распространяется на все более высокие разрушающие напряжения, что подтверждается опытами.

Относительно длительный процесс снятия диаграмм $\sigma - \varepsilon$ в практике выемочных технологий в общем виде воспроизводится в физической модели механизма резания тел.

Внешнее усилие на инструмент преодолевает возрастающее сопротивление резанию как и растягивающее образец при испытаниях, находясь непрерывно в "статическом" равновесии с внутренними (упругими) силами тела, вплоть до акта разрыва в нем местных связей, и в пределе не зависит от скорости реза.

Поэтому в математических соотношениях, описывающих разрушение, длительность его времени не определена — связана с усилием, действующим на резец извне (машиной). В инженерных расчетах по технологии резания пользуются предельными критериями (одноосное сопротивление, коэффициенты интенсивности напряжений) с применением методов граничных, либо конечных элементов в краевых задачах механики [8], [12].

Однако, при динамических способах разрушения, схема непрерывного, статически равновесного состояния нарушается, а кризис наступает быстрее.

При конечных отклонениях сил от равновесия в аналитические уравнения механики входит время, в частности, затрачиваемое на концентрацию напряжений в локальных, найденных по расчету областях тела. Прогнозировать разрушение в этих местах возможно лишь в тех случаях, когда продолжительность развития процесса обеспечивает требуемое кинетической концепцией прочности время достижения напряжениями их критических значений; предельные теории такого фактора времени не содержат. Его включение в критически напряженно-деформированное состояние обобщает теорию, расширяет круг решения прочностных задач в механике.

Заметим, что в механике разрушения временной фактор предложен как критерий предсказуемости нестабильности трещин из следующих соображений [35], [36].

Условия страгивания трещины при квазистатических условиях

$$K \geq K_c, \quad \frac{\partial K}{\partial \ell} \geq 0,$$

при динамических колебаниях нагрузки заменяются на

$$K \geq K_y, \quad \frac{\partial K}{\partial \ell} + \frac{1}{V} \frac{\partial K}{\partial t} \geq 0,$$

где ℓ — длина трещины; V — скорость ее распространения. Однако, максимум коэффициента K и его производных наступает не одновременно и поэтому продвижение начинается при значении K_d с запаздыванием. Минимум этой временной разницы считается (по данным опытов) константой материала — “критерием минимума времени”.

4. ОПЫТЫ ПО ДИНАМИЧЕСКОМУ РАЗРУШЕНИЮ

4.1. Разрушение ударным инструментом

Разрушение массива от удара по поверхности в механике, в развитие задачи Герца о соударении двух шаров, обычно рассматривается как квазистатическая задача для упругого полупространства. В качестве нагрузки может прикладываться действие жесткой сферы, цилиндра, жесткого штампа и др. Пренебрежение инерционными членами в уравнениях динамики при нагружении равносильно предположению, что:

- 1) контактное усилие в любой момент времени уравнивается реакцией полупространства, находящегося в строго статическом напряженно-деформированном состоянии;
- 2) за элементарный промежуток времени происходит бесконечно малое изменение всех статических параметров в бесконечно большой области;
- 3) в начальный момент удара сила взаимодействия на контакте равна нулю при любой площади соприкосновения и скорости ударника V_0 .

При этих предположениях изменение напряжений массива во времени получается без учета их волнового характера. Согласно такому расчету, если не происходит разрушения, кинетическая энергия ударника к некоторому моменту времени соприкосновения полностью переходит в потенциальную энергию упругой деформации, и в последующем, в затухающие колебания массы. В том случае, если удар предназначен для разрушения, в нем кинетическая энергия используется лишь частично – в количестве, необходимом для достижения массивом критического состояния.

Избыток кинетической энергии, согласно теории предельной теории прочности, используется для разрушения лишь тогда, когда он настолько велик, что может обеспечить его второй акт.

Эта теория проверялась в опытах [32] удара стержней, имеющих полусферические наконечники диаметром от 1.25 до 10 мм, на образцах из кварцита или стекла. Отклонение опытной кривой от теоретической формулы начиналось после того, как ударное усилие достигало 30% от разрушающего. Картина распада образца из стекла была близка к теоретическим данным; образовывались концентрические трещины разрыва на поверхности и глубинные – сдвига внутри массива.

В опытах [33] по разрушению штампами хрупких массивов при соответствующем освещении обнаружено, что по достижении нагрузкой определенной величины, в глубине образца на оси, наблюдается темное пятно. С увеличением нагрузки пятно распространяется и занимаемая им площадь растет в сторону поверхности образца. Так, в глубине массива зарождается расширяющаяся поверхность скалывания. Дальнейшее развитие трещины скалывания от указанной точки происходит по конической поверхности с выходом на границу массива; площадь лунки на поверхности массива получается больше контактной. На поверхности скола даже при типично хрупком разрушении обнаруживаются пластические отпечатки.

В работе [23] проводились опыты по ударному воздействию на образцы горной породы с фиксированием времени разрушения (долговечности).

Таблица 4

Долговечность мрамора при ударной нагрузке

Штамп		Скорость удара V_0 , м/с	Долговечность T , с	Объем W_0 , см ³	Относительный объем $\beta_w = W_0 d_a^{-3}$
Форма	Диаметр d_a , мм				
Плоский	10	10	$5 \cdot 10^{-4}$	1.7	1.7
		34	$1.1 \cdot 10^{-4}$	1.0	1.0
		46	$0.35 \cdot 10^{-4}$	1.2	1.2
Сферический	5	12.5	$3 \cdot 10^{-4}$	0.38	3.05
		26	$1.3 \cdot 10^{-4}$	0.48	3.85

Блоки белого уральского мрамора и поликристаллической каменной соли нагружались круглым штампом, с помощью пневматического копра наносился удар бойком. Скорости удара были значительно больше обычно применяющихся в технологических процессах разрушения пород. В табл. 4 по данным этих опытов приведены зависимости долговечности от скорости соударения с мрамором, разного типа ударников. Там же даны объемы лунок в абсолютных W_0 и относительных $\beta_w = W_0 d_a^{-3}$ величинах. Долговечность с увеличением интенсивности нагрузки сокращается. Но конечная деформация (определяющаяся при одних и тех же размерах образца и ударника объемом разрушения) остается постоянной; β_w не меняется даже при сокращении времени разрушения на порядок (см. в табл. 4). Отсюда вывод, что с увеличением скорости при ударе растет не только производительность, но и энергоёмкость.

Из приведенных выше опытных данных нельзя установить зависимости относительного объема разрушения β_w от диаметра ударника d_a , а также сопоставить данные таблицы с теоретическими результатами; размеры кусков (кусковатость) породы, откальывающихся при контактном разрушении, относится ныне к нерешенным задачам механики. В [23] снимались также опытные диаграммы $P-u$, относящиеся к разным скоростям удара: 40,5; 34; 21; 10 м/с, с помощью осциллограмм, полученных для усилий и смещений в функции от времени, при разрушении мрамора плоским штампом диаметром 10 мм. Время, при котором достигались максимальные усилия P и смещения u , практически совпадало. Диаграммы $P-u$ для разных скоростей удара сильно отличаются друг от друга.

4.2. Опыты по гидроструйке

Гидравлическая добыча твердых ископаемых является одной из форм промышленного использования энергии жидкости. Опыты проводились во многих научно-исследовательских отечественных и зарубежных центрах. В частности, сообщения о результатах опытов делались на международных симпозиумах по технологии резания струями.

В лабораторных условиях для разрушения использовались образцы естественных пород, а также кубики, сделанные из искусственных смесей. Изготовленные из них хрупкие материалы, обладая большой устойчивостью механических констант, при динамических воздействиях дают небольшой разброс опытных точек.

Гидравлические лабораторные установки для разрушения массивов позволяют перемещать испытуемый образец относительно оси соплового устройства. В условиях горной промышленности соответственно осуществляется качание гидромониторного ствола. Таким образом, обеспечивается скольжение центра давления струи по разрушаемой поверхности.

Это необходимо для предупреждения образования защитного буфера в виде водяной подушки внутри лунок, углубляющихся в массиве при действии "в точку" – отколе кусков в одном и том же месте. Подобный буфер – "водобойный колодец" гасит часть энергии потока – увеличивает ее потребление при возрастании глубины лунки. Скорость перемещения центра давления по поверхности V_n выбирается по оптимуму.

С увеличением скорости V_n от нуля энергоемкость сначала, ввиду снижения буферного эффекта, падает, но затем начинает расти, так как на

большой скорости скольжения струя не успевает производить откола с поверхности.

В Санкт-Петербургском горном институте были испытаны образцы [10] со стороны куба 200 мм, изготовленного из песчано-цементной смеси. В нем выработывалась борозда водяной струей, при диаметре сопла $d = 3$ мм. Характерная прочность (временное сопротивление) кубиков на сжатие $\sigma_c = 4 \div 6$ МПа, давление p_0 перед насадком повышалось до 20 МПа.

Образец относительно оси насадка перемещался вниз по вертикали, что обеспечивало свободный слив отработанной воды из выемки. По времени образования борозды t и объему полученной выемки W определялась производительность разрушения

$$\Pi = \frac{W}{t}; \quad (4.2.-1)$$

затем по расходу воды Q через насадок и мощности струи

$$N = Qp_0 = \frac{\pi d^2}{4} 0,95 \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} p_0^3, \quad (4.2.-2)$$

находилась энергоемкость разрушения

$$\Theta = \frac{N}{\Pi}, \quad (4.2.-3)$$

где ρ_0 – плотность жидкости; 0,95 – коэффициент расхода насадка; p_0 – давление перед гидромоторным насадком; d_0 – его диаметр.

Результаты обработки этих экспериментов показали, что с увеличением давления энергоемкость разрушения почти все время падает, а производительность монотонно растет.

С приближением к малым давлениям, равным примерно 50% от характерной прочности на сжатие σ_c , происходит резкое изменение производительности и энергоемкости. Исследования [31] показывают, что вблизи этих давлений струи разрушение становится нестабильным и неэффективным.

В опытах [20] Института горного дела им. Скопинского испытания велись на экспериментальной гидромониторной установке с разными

диаметрами сопел, от 1,12 до 3,5 мм. Одновременно работали два сопла; испытуемые образцы каменного угля со стороны куба 400 мм имели характерную прочность $\sigma_c = 18 - 19$ МПа.

В опытах оптимальная скорость V_{Π} перемещения центра давления струи по поверхности образца выбиралась по предварительно полученным зависимостям энергоёмкости $\mathcal{E} = \mathcal{E}(V_{\Pi})$ для разных гидромониторных давлений и диаметров сопел.

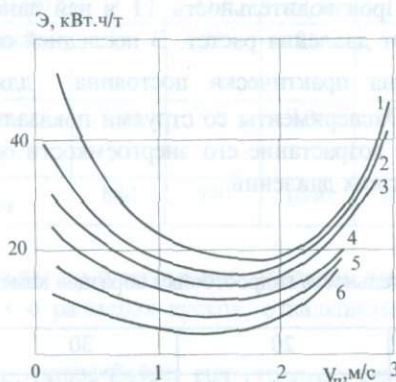


Рис.4. Зависимость энергоёмкости разрушения от скорости перемещения центра давления струи по поверхности массива

На рис. 4 приведены для давлений 20 МПа опытные диаграммы 1; 2; 3; 4; 5; 6, полученные, соответственно, при диаметрах струй 3,5; 3,0; 2,5; 2,18; 1,52; 1,12 мм. Для этих кривых минимум энергоёмкости находится в диапазоне скоростей перемещения $1,0 \div 2,0$ м/с.

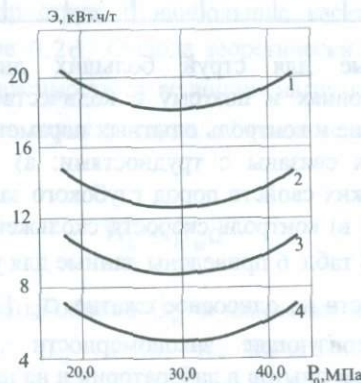


Рис.5. Зависимость энергоёмкости разрушения от давления струи

На рис.5 показаны опытные зависимости энергоёмкости гидроразрушения от давления струи для разных диаметров сопел при оптимальных скоростях перемещения струи; кривые 1; 2; 4 относятся к диаметрам, соответственно, 3,5; 2,5; 1,12 мм. Здесь энергоёмкость растет пропорционально диаметру струи. Кривая 3 дана для диаметра сопла 1,12 мм, но при скорости перемещения 0,24 м/с, не являющейся оптимальной, и поэтому дает повышенные значения энергоёмкости.

По данным кривых 1; 2; 4 на рис.5 с помощью формул (4.2.-1) и (4.2.-3) составлена табл. 5. Производительность Π в ней дана в расчете на одно сопло и в функции от давления растет. В последней строчке табл. 5 дана величина Πd^{-1} , она практически постоянна для каждого данного значения давления. Эксперименты со струями показали, что неустойчивое разрушение и резкое возрастание его энергоёмкости охватывает довольно большой диапазон низких давлений.

Таблица 5

Производительность гидроотбойки образцов каменного угля

Давление p_0 , МПа	20			30			40		
Диаметр сопла d , мм	3.5	2.5	1.12	3.5	2.5	1.12	3.5	2.5	1.12
Энергоёмкость \mathcal{E} , кВт.ч / м ³	20	14	6	18	13	5.5	19.5	14	6
Производительность Π , м ³ /ч	1.14	1.06	0.49	2.95	2.03	0.9	4.18	3.0	1.4
Πd^{-1} , м ² /ч	412	424	435	840	815	805	1195	1200	1250

Опытные данные для струй больших диаметров получены в промышленных условиях и поэтому с количественной стороны менее стабильны. Измерение и контроль опытных параметров в эксплуатационных условиях на шахтах связаны с трудностями: а) количественная оценка пестроты механических свойств пород глубокого залегания; б) учет потерь выемочного объема; в) контроль скорости скольжения центра давления по контакту V_n и др. В табл. 6 приведены данные для углей из шахт Кузбасса, с пределами прочности на одноосное сжатие σ_c [31] 10–11 МПа. Общие тенденции, характеризующие закономерности, которые связывают параметры, по данным опытов в лаборатории и на производстве одинаковы. Сюда, хотя и с большим разбросом опытных точек (особенно в табл. 6

относится, в частности, постоянство величины Pd^{-1} при одном и том же давлении струи; энергоёмкость в табл. 6 с ростом давления также увеличивается.

Таблица 6
Производительность гидроотбойки угля на шахте (Кузбасс)

Давление p_0 , МПа	6		8		10	
Диаметр сопла d , мм	17.1	21.4	17.1	21.4	17.1	21.4
Производительность Π , $M^3/ч$	15	21	28	40	34	51
Энергоёмкость \mathcal{E} , кВт.ч / M^3	7.30	9.9	7.35	7.85	8.55	8.85
Pd^{-1} , $M^2/ч$	880	940	1640	1840	2000	2400

Проведенные опыты по разрушению массивов стационарными струями не содержат данных о размерах кусков, откалывающихся за один акт от массива.

Эта задача при гидроотбойке еще труднее, чем при механическом разрушении.

Сложность заключается в невозможности выделить при непрерывном течении струи единичный акт откола и изучить его структуру. На основе визуальных наблюдений и теоретических соображений считается [13], что механизм образования единичной лунки при гидравлическом и механическом разрушении аналогичен. Здесь, на поверхности полупространства давление сосредоточено в круге диаметром того же порядка, что и диаметр струи d ; наибольшие касательные напряжения лежат по оси на глубине $0,2d$. Отсюда теоретически размеры одноактной лунки с учетом их независимости от величины нагрузки p_0 должны быть того же порядка, что и диаметр струи; объем выемки при этом можно представить в виде

$$W_0 = \beta_w d^3. \quad (4.2.-4)$$

Значение коэффициента объема β_w в настоящее время указать можно только по оценкам [13], $\beta_w = 0,35$, что значительно меньше опытных данных при разрушении ударом (см. табл.4).

4.3. Интерпретация опытных данных

В работе [32] при анализе полученных в ней опытных результатов использована квазистатическая теория удара по Герцу в сочетании с предельной теорией прочности. Предполагалось возможность второго акта разрушения.

Откол глубиной $u = 0,2$ мм от образца кварцита был получен бойком с полусферическим наконечником из стали радиусом 6 мм с начальной ударной скоростью $V_0 = 1$ м/с.

Воспользовавшись формулой Герца [30] для определения времени соударения, находим

$$t = 2,91 \frac{u}{V_0} = 2,91 \frac{0,2 \cdot 10^{-3}}{1} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ с,}$$

что должно быть не меньше времени, за которое происходит откол (долговечности). Но это время на несколько порядков меньше того, которое затрачивается обычно на разрушение образцов в испытаниях при снятии диаграмм $\sigma - \varepsilon$. Из кинетической концепции прочности следует, что откол в данном случае произошел при напряжениях, превышающих предел, т.е. сконструированное по "предельной" теории оборудование для динамического разрушения имело бы (без расчетного запаса) заниженные параметры.

Теория разрушения хрупких массивов стационарными струями применительно к гидроотбойке углей, путем истолкования результатов опытов Санкт-Петербургского горного института, впервые была предложена А.М.Журавским [13].

Исходным в предположениях было допущение об аналогии между механизмом воздействия струи и твердого штампа, приложенного к поверхности статически. Нагружение полупространства усилием от струи представляется произвольно заданным распределением. В том случае, когда кинетическая энергии струи недостаточна для разрушения, усилие ее взаимодействия с массивом в пределе достигает величины, которая находится в соответствии с гидромониторным давлением p_0 . Если же происходит откол кусков, то максимальное давление по оси в каждом акте определяется предельно прочностными характеристиками массива.

Точечная трещина за время каждого акта разрушения распространяется изнутри в сторону поверхности массива. Очертание поверхности скола определяет объем отколовшихся кусков, который аппроксимируется выражением (4.2.-4).

Критерием начала скола в точке $z^* = z_0^*$, $\gamma^* = 0$ при внутреннем критическом скальвающем напряжении (временном сопротивлении) является соответствующее ему осевое давление на поверхности массива. С помощью (4.2.-4) находится энергоемкость разрушения

$$\mathcal{E} = \frac{A_c}{W_0}, \quad (4.3.-1)$$

где A_c – статическая работа упругой деформации при отколе. Для надежного откола кусков берется расчетный запас. Он обеспечивается за счет превышения удельной кинетической энергии струи p_0 над минимальным разрушающим осевым давлением p_c .

Для данной статической теории характерно то, что она не содержит никакого элемента времени. Для давления стационарной струи на полупространство статический метод не приводится к квазистатическому. Независимо от процесса деформации или разрушения струя действует непрерывно. Выделить ее элементы, связанные своей массой с определенной величиной смещения поверхности или объема разрушения, не удастся. Эти особенности являются причиной того, что статические задачи для струи неадекватны физическому процессу. Кроме того, энергия струи, затраченная на откол, не равна работе упругой деформации массива, а в случае невысоких скоростей течения расходует неограниченное количество гидроэнергии со слабым полезным эффектом; тогда основная энергия при растекании гасится трением по поверхности.

В итоге, расход удельной энергии по формуле (4.3.-1) получается на несколько порядков меньше опытных данных, найденных по параметрам струи.

В работе [17] указано на слабое влияние анизотропии среды на результаты расчетов при гидроотбойке.

5. ДИНАМИКА БЫСТРОПРОТЕКАЮЩИХ ПРОЦЕССОВ РАЗРУШЕНИЯ

5.1. Механика динамического нагружения поверхности

Динамика нагружения при контактном разрушении существенно влияет на процесс в целом. Она определяется граничными условиями на поверхности соприкосновения, сформулированными физически, в виде функциональных зависимостей от времени. Начальное давление на контактной поверхности при ударе теоретически находится элементарно. На величину скорости \dot{u}_0 , которую в начальный момент приобретает ранее неподвижная площадка на контакте, происходит уменьшение скорости двигавшейся поверхности ударного тела

$$-\Delta V = V_0 - \dot{u}_0.$$

Тогда, согласно уравнению импульсов, величина давления, возникшего на рассматриваемой (элементарной) площадке,

$$p = -\Delta V \rho' c' = \dot{u}_0 \rho c; \quad (5.1.-1)$$

отсюда скачок давления в начале контакта

$$p = \frac{\rho c \rho' c'}{\rho c + \rho' c'} V_0.$$

где ρ' , ρ – плотности; c' , c – скорости продольной волны, соответственно ударного и покоившегося тела; V_0 – начальная скорость ударного тела.

В случае удара капли жидкости об упругий твердый массив ($\rho_0 c_0 = \rho' c' \ll \rho c$) из (5.1.-1) следует: $p_0 = \rho_0 c_0 V_0$; в случае жесткого ударного тела ($\rho' c' \gg \rho c$)

$$p = \rho c V_0. \quad (5.1.-2)$$

При площади соприкасания F суммарная сила взаимодействия соударяемых тел в начале контакта

$$P = \int_F p \, dF. \quad (5.1.-3)$$

Дальнейшее изменение силы за время соприкосновения зависит от геометрических и физических условий. Но даже в случае плоской поверхности вначале плотного соприкосновения везде на поверхности не получается. Нередко контакт бывает близким к точечному. Кроме того, в системе соударяемых тел и измерительных приборов в опытах неизбежны инерционные процессы. В итоге, в начале ударного интервала времени гипотеза Герца с опытными данными более или менее согласуется, наблюдается близкое к плавному нарастание контактной силы от нуля, что объясняется неучитываемыми особенностями эксперимента; теоретически ударная нагрузка должна передаваться скачком согласно (5.1.-1), (5.1.-3).

Другим видом удара является мгновенное приложение постоянного давления P к твердому телу; при этом соотношение (5.1.-1) сохраняет силу, давая величину начальной скорости (см. также (2.5.-5)) контактной площадки,

$$\dot{u}_0 = \frac{P}{\rho c}. \quad (5.1.-4)$$

На практике такой удар осуществить трудно. Но близкие условия получаются при гидравлическом разрушении. Это связано с тем, что при упругом смещении поверхности массива со скоростью \dot{u}_0 сила давления на нее при скорости струи V_0 , равна

$$P = \rho_0 Q (V_0 - \dot{u}_0). \quad (5.1.-5)$$

Отсюда следует, что при $\dot{u}_0 \ll V_0$ давление гидромониторной струи, прикладываясь после откола к новой площадке разрушаемого массива, почти не меняется [4]. Квазистационарная струя жидкости, оказывая на поверхность массива постоянное по величине давление, откалывает от него куски; образуется выемка, которая имеет форму борозды, так как фактически центр давления прижатой к массиву струи не является неподвижным, а скользит по его поверхности. Но скорость скольжения невелика и в каждом акте откола действие струи можно рассматривать как направленное в "точку".

Тогда, в случае, если откола не происходит, полупространство под постоянным давлением струи стремится к равновесному состоянию, реализующемуся очень быстро.

При отколе куска образование лунки в каждом акте происходит в напряженной части внутри массива, вблизи центра нагрузки.

Около обнажившейся после откола площадки формируется новая область концентрации напряжений в полупространстве. Этот процесс развивается под давлением жидкости, приложенным к площади, включающей обнажившуюся поверхность лунки в той части массива, которая до откола была напряжена слабее.

Подобный откол кусков с предварительной концентрацией напряжений возле центра поверхности массива осуществляется без перерывов во времени.

Продолжительность каждого такого акта разрушения условно можно разбить на два интервала: развития напряжений в массиве и образования в области их концентрации зародышей опасных трещин; развития трещин с отделением кусков, сопровождающимся нагружением обнажившейся поверхности, давлением струи.

Такое нагружение является переходом полупространства к следующему акту развития напряженного состояния, определяя его начало. При больших нагрузках этот переход протекает относительно быстро и его длительностью практически можно пренебречь. Тогда переход от одного этапа развития напряжений к другому, очередному, получается скачкообразным. Это означает, что в начале этапа развития напряжений давление на вновь образовавшейся контактной поверхности принимается приложенным мгновенно, хотя возникший на ней фронт волны очерчен не четко и не строго вертикален. Но распластанность лба волны определяется лишь игнорируемым интервалом времени развития трещин и отделения кусков от массива. В итоге, в данном случае для определения напряжений, применима указанная в главе 2 задача, в которой рассматривается мгновенно нагруженное упругое полупространство (см. табл. 1, 2).

Отсюда видно сходство между разрушением [14] и стационарной струей. Основная разница заключается в энергетических соотношениях механизма воздействия на массив.

Так, теоретическая мощность деформации в начальный момент приложения давления струи, см. формулы (5.1.-3) и (5.1.-4),

$$N_0 = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{p^2}{\rho c} r dr.$$

Используя формулу (2.2.-7), после интегрирования по всей поверхности [4] получим

$$N_0 = \frac{P V_0^2}{8 \rho c} \rho_0.$$

Отсюда, для начальной, т.е. максимальной средней скорости поверхности полупространства $\dot{u}_m = N_0 P^{-1}$ (по оси скорость в 4 раза больше), получим соотношение

$$\frac{\dot{u}_m}{V_0} = \frac{V_0 \rho_0}{8 \rho c}. \quad (5.1.-6)$$

Выражение (5.1.-6) позволяет сделать оценку отношения величин \dot{u}_m и V_0 для реальных условий. По расчетам [4] условие $\dot{u}_m^0 \ll V_0$ при минимальной волновой скорости $c = 3000$ м/с, до давлений 100 МПа в достаточной степени выдерживается, отношение (5.1.-6) не превышает величины 0,009. Отсюда следует, что в формуле (5.1.-5) изменение силы давления полупространства незначительно, что подтверждает допустимость применения при расчетах гидроразрушения результатов главы 2. Затрачиваемая струей на истечение теоретическая мощность с учетом (4.2.-2)

$$N = \rho_0 Q \frac{V_0^2}{2} = \frac{P V_0}{2}.$$

Относя полезную мощность деформации к затраченной струей на истечение, получим теоретический КПД деформирования при гидроразрушении

$$\eta = \frac{2 \dot{u}_m}{V_0}, \quad (5.1.-7)$$

где \dot{u}_m^0 — средняя скорость поверхности массива в любой момент времени.

Если приложение нагрузки разрушения не вызывает, то \dot{u}_m^0 и η стремятся к нулю; струя при этом расходует энергию, не производя

полезной работы. Отсюда следует, что, чем быстрее происходит разрушение, тем выше средний КПД гидравлического нагружения η .

Фактический КПД гидроразрушения выше, чем КПД деформирования (нагружения), поскольку в (5.1.-7) не учтена остальная полезная работа на разрыв внутренних связей тела: 1) на пластические деформации; 2) на образование поверхностной энергии по берегам трещин. Кроме того, происходит колебание силы P из-за сопротивлений, создаваемых отскакивающими кусками, и других эффектов в струе.

Заметим также, что динамика, связанная с упругостью жидкости (гидроупругостью), при этом не учитывается, поскольку свободная поверхность натекающего потока легко деформируема и скорость волны в струе очень мала.

5.2. Феноменологическая модель гидрооткола

Согласно феноменологическим теориям условия, при которых начинают развиваться трещины, определяются касательными и растягивающими напряжениями в теле; пока трещины не растут, материал рассматривается как сплошная среда; для осесимметричной задачи можно пользоваться уравнениями главы 2.

В расчеты по разрушению в динамике входит фактор времени. Сюда он либо переносится из основных уравнений для среды, либо вносится за счет граничных условий, описывающих процесс нагружения. При разрушении массива струй нестационарность поля напряжений связана со спецификой процесса. После очередного акта откола, с изменением поверхности контакта происходит перемещение формирующейся около центра нагрузки области концентрации напряжений, стремящихся к своим статическим значениям. Резкость изменения поля напряжений определяется переходами его состояния от одного акта разрушения к другому.

Механизм такого переходного процесса, включающего развитие магистральной трещины, откол кусков и скачок нагрузки на образовавшейся поверхности, очень сложен. Но исходя из кратковременности этого процесса, возможно упрощение оценки его влияния на разрушение. Поскольку смена актов приурочена к моменту начала роста трещин, от быстроты их развития зависит продолжительность переходного скачка и растянутость распространяющегося в массиве фронта напряжений. Лоб волны наиболее крут, когда нагрузка обеспечивает максимум скорости развития магистральной трещины. Он может быть принят близким к скорости волн Релея, см. главу 2.

Обычно при гидравлическом разрушении внешняя нагрузка бывает достаточной по величине и импульсивности для быстрого развития трещин в массиве со скоростью C_2 .

Таблица 7

Время гидрооткольного акта для образцов каменного угля

Диаметр струи d , мм	3.5			2.5			1.12		
Основное время передачи энергии T_e , мкс	7			5			2.25		
Время образования магистральной трещины T_c , мкс	0.94			0.67			0.30		
Давление струи p_0 , МПа	20	30	40	20	30	40	20	30	40
Опытная долговечность T , мкс	34.5	17.0	11.9	17.1	8.8	6.0	3.4	1.8	1.15
Время развития напряжений ΔT , мкс	33.56	16.06	10.96	16.43	8.13	5.31	3.1	1.5	0.86
Время развития напряжений $\Delta T'$ в точке на глубине, мкс	33.47	15.85	10.77	16.29	7.99	5.17	3.04	1.44	0.80
Параметр t^*	38.4	18.3	12.5	26.6	13.2	6.1	11.1	5.35	3.08
Наибольшее касательное напряжение τ , МПа	5.26	7.9	10.52	5.26	7.9	10.52	5.26	7.9	10.52

Выше уже указывалось, что геометрические размеры области, в которой происходит откол кусков от массива, по порядку величины совпадают с

радиусом струи. Отделение кусков происходит при образовании магистральной трещины, сопровождающемся формированием поверхности откольной лунки. Требующийся для этого интервал времени T_c может быть оценен по размерам лунки для струи $d = 2 r_0$ и скорости релеевских волн c_2

$$T_c = \frac{r_0}{c_2} \quad (5.2.-1)$$

Для расчета затрат всего времени на одноактный откол (долговечности) служит соотношение

$$T = \frac{W_0}{\Pi}, \quad (5.2.-2)$$

где Π – производительность разрушения по опытным данным; W_0 – объем лунки при одноактном отколе, см. формулу (4.2.-4).

Таблица 8

Время гидрооткольного акта для угля на шахте (Кузбасс)

Диаметр струи d , мм	21.4			17.1		
Основное время передачи энергии T_e , мкс	42.8			34.2		
Время образования магистральной трещины T_c , мкс	5.8			4.7		
Давление струи p_0 , МПа	6	8	10	6	8	10
Опытная долговечность T , мкс	550	392	230	400	216	178
Время развития напряжений ΔT , мкс	544.2	386.2	224.2	395.3	211.3	173.3
Время развития напряжений $\Delta T'$ в точке на глубине, мкс	543.0	385.0	223.0	394.4	210.4	172.4
Параметр t^*	102.5	72.6	42.3	93.5	49.7	40.8
Наибольшее касательное напряжение τ , МПа	1.58	2.1	2.63	1.05	2.1	2.63

Предложенные для расчета лунки значения коэффициента β_w находятся в широком диапазоне величин и низки сравнительно с опытными данными для удара, где имелась реальная возможность для замера объемов лунки. Приводимые здесь табл. 7 и 8 составлены для наиболее вероятного значения $\beta_w = 0,34$. Таблицы показывают время одноактного откола T , см. формулу (5.2.-2), в сравнении с временем образования магистральной трещины T_c , см. формулу (5.2.-1). Данные по производительности разрушения каменного угля для формулы (5.2.-2) взяты: в табл.7 из табл.5, в табл.8 из табл.6.

С уменьшением давлений, а также с ростом диаметра струи, как для малых (см. табл.7), так и больших (см. табл.8) его значений, долговечность T , по сравнению с T_c растет. Кроме того, долговечность T , а значит и время развития напряжений $\Delta T = T - T_c$, всюду в несколько раз превышает время раскрытия трещин T_c ; для диаметров промышленных струй данное соотношение доходит до двух порядков. Эти результаты указывают на то, что: 1) время, расходуемое на разрушение, в основном идет на развитие напряжений ΔT , которое определяет почти всю длительность каждого акта; 2) переходы динамического состояния развития напряжений в массиве от акта к акту и приложение нагрузки на поверхности в их начале – после откола, практически близки к мгновенным.

Исходя из этого, для оценки напряжений, развивающихся за один акт откола под действием струи, можно пользоваться результатами главы 2. В табл. 7 и 8 подсчитано:

1) время непосредственного развития напряжений в полупространстве

$$\Delta T = T - T_c;$$

2) параметр $t^* = \Delta T c_1 r_0^{-1}$, определяющий в табл. 1 относительные напряжения. Практически во всех точках к началу откола – в конце времени своего развития, напряжения близки к статическим, например, в точке $z = 0,40625 r_0$, $r = 0$, где наибольшее касательное напряжение $\tau = 0,263 p_0$.

Эта точка особенно тем, что в ней в статических условиях находится максимум наибольших касательных напряжений (область разрушения).

Такие, расположенные в глубине массива, точки отличаются от лежащих на поверхности характером развития напряжений. Они тоже возникают здесь скачком, но лишь после прихода продольной волны; до этого они остаются равными нулю. В табл. 7 и 8 для подсчета ΔT – чистого

времени развития напряжений в точке $z = 0,40625 r_0$, $r = 0$, из ΔT вычитается время пробега волною пути от поверхности до этой точки: $t' = 0,218 r_0 \text{ с}^{-1}$ (см. табл.1). Периоды напряженного состояния ΔT и $\Delta T'$ мало отличаются друг от друга (также и от долговечности T) почти для всех подсчитанных значений, что есть результат большой скорости волны напряжений. Кроме того, как видно из табл. 1, наиболее велики напряжения не в конце, а в начале удара, к моменту же откола они опускаются до статических.

Стабилизируются также смещения, но медленнее, в частности, в центре поверхности; здесь напряжения остаются все время постоянными, включая и статическое состояние.

Таким образом, высокие напряжения в опасных точках действуют длительно – в течение всего времени нагружения; разрушение наступает после того, как вслед за коротким интервалом времени нестационарности напряжения, уменьшаясь, стабилизируются на статических значениях – в таблицах 10 и 11 все $t^* > 3$, что соответствует стабильным значениям $\tau (p_0)^{-1} = 0,263$. При этом подсчитанные величины касательных напряжений не совпадают с отмечаемыми при испытаниях каменных углей характерными прочностями. Для углей марки АП, с пределом на осевое сжатие 18 МПа, предельное скальвающее напряжение около 4,5 МПа, а в табл. 7 имеются вдвое большие значения. Для кузбасских углей предельное напряжение скалывания около 2МПа; а в табл. 8 имеются и меньшие значения, но при этом время разрушения в промышленных условиях больше.

Оценка показывает, что при $t^* = 3$ абсолютное время стабилизации напряжений на статических, для струи $d = 1,12 - 3,5$ мм близко соответственно к $t = 0,85 - 2,5$ мкс; при этом долговечность при среднем давлении 30 МПа (см. табл.7) равна: 1,8 – 1,7 мкс. Для $d = 17,1 - 21,4$ мм имеем $t = 12,5 - 16$ мкс, а долговечности при среднем давлении 8 МПа (см. табл.8) равны 216 – 392 мкс.

Подсчеты показали также, что относительные растягивающие напряжения $\sigma_r (p_0)^{-1}$ возникают только на расстоянии $r \approx 5 r_0$ от оси на поверхности полупространства, причем уже в статическом состоянии достигая лишь значения 0,0053. Для давления 40 МПа это дает абсолютную величину напряжения 0,212 МПа, а для 10 МПа лишь 0,053 МПа, тогда как пределы прочности на растяжение приблизительно равны соответственно 1,5 МПа и 0,5 МПа.

Эти данные указывают на слабое влияние растягивающих напряжений на разрушение массивов водяными струями.

В табл. 7 и 8 (по данным табл. 2) подсчитан момент времени T_e , к которому реализуется 99 % всей динамической работы, совершаемой струей. Можно считать, что это и есть основное время, за которое происходит передача полупространству энергии струи при его деформировании; время смещений в центре поверхности (табл. 2) в два раза больше.

На дальнейшем отрезке времени одного акта до откола гидравлическая мощность расходуется на поддержание давления на поверхности забоя, на трение и ее истирание; смещений поверхности полупространства почти не происходит. Оно в зоне контакта находится практически в постоянном напряженно-деформированном состоянии; смещения связаны лишь с волновой энергией распространяющихся колебаний упругой среды на бесконечности.

5.3.Размерностный анализ при контактном отколе

Отдельные задачи, относящиеся к импульсивному нагружению и разрушению твердых тел, решаются с помощью размерностного анализа. Однако, истолкование механизма разрушения при ударе плохо укладывается в рамки статических теорий прочности, не содержащих фактора времени – долговечности материала. Рассмотрим следующие условия разрушения массива: 1) процесс разрушения (в целом, вместе с деформацией и нагружением) изометричен; 2) продолжительность одного акта разрушения мала, сравнение производится с наикратчайшим временем прихода в область концентрации напряжений волн, отраженных от ненагруженных граней массива; 3) задача осесимметрична; распределение воздействия на массив определено одним линейным размером $d = 2 r_0$; 4) нагрузка перпендикулярна на поверхности массива, а ее величина при постоянном d зависит от одного только динамического параметра p_0 ; 5) массив однороден. Геометрическое подобие в данной задаче определяется условиями на контакте, которые характеризуются динамикой воздействующего тела. Общий вид напряжений при этом представляется динамическим соотношением, см., например, табл. 1,

$$\sigma(z, r, t) = p_0 f\left(\frac{z}{d}, \frac{r}{d}, \frac{c_1 t}{d}\right).$$

При развитии динамического процесса, ввиду большой скорости волны напряжений, их стабилизация на статических значениях (на примере

разрушения струей) происходит задолго до начала откола, см. п.5.2; опытные размеры лунки при разных ударных усилиях не меняются, см.табл.4.

Считая, что магистральная трещина, независимо от давления, берет начало в “малой” окрестности некоторой постоянной точки $z d^{-1}$, $r d^{-1}$, получим согласно кинетической концепции прочности, напряжение в ней при разрушении $t = T$,

$$\sigma = \sigma(T).$$

Два эти соотношения связывают зависящее от осевого давления p_0 напряжение σ при разрушении и долговечность T , что, позволяя исключить $\sigma(z, r, t)$, указывает на связь между T и p_0 ; при постоянном значении d ее для каждой данной среды, по аналогии с (3.3.-1), ищем в виде

$$\lg T = A - B p_0, \quad (5.3.-1)$$

где A , B – эмпирические коэффициенты, которые зависят от вида задачи. В частности, применительно к гидростройке, сопоставление значений $\lg T$ в уравнении регрессии вида (5.3.-1) с опытными $\lg T_e$, для каменных углей, см. п. 4.2., при обработке методом линейной корреляции показало отклонение не более, чем на 5,5% [4].

Таблица 9
Сравнение опытной и расчетной относительной долговечности $T_e d^{-2}$ и $T d^{-2}$

Относительная долговечность	Для образцов угля (средняя для $d = 1.12; 2.5; 3.5$ мм)			Для угля из шахты (средняя для $d = 17.1; 21.4$ мм)		
	20	30	40	6	8	10
p , МПа						
$\lg(T_e d^{-2})$	0.84	0.55	0.38	0.51	0.24	0.14
$\lg(T d^{-2})$	0.84	0.59	0.34	0.49	0.29	0.11

Постоянство отношений Πd^{-1} при независимости коэффициента β_w от p_0 и d , согласно (4.2.-4) и (5.2.-2), должно приводить к постоянным значениям $T_e d^{-2}$. Это позволяет для данной системы подобия выяснить влияние d — по существу геометрического $r_0 = 0,5d$ размера воздействующего тела на долговечность образца при отколе. Соответствующие оценки приведены в табл. 9. Для каждого данного давления получающиеся значения практически постоянны, а средние $T_e d^{-2}$ значения те же, что и из уравнения

$$\lg T = A_0 + m \lg d - B_0 p_0. \quad (5.3.-2)$$

Здесь T в секундах; p_0 — мегапаскалях; $m = 2$; для образцов каменных углей и лабораторных диаметров сопел $A_0 = 1,34$; $B_0 = 0,025$; для углей Кузбасса и промышленных диаметров сопел $A_0 = 1,05$; $B_0 = 0,095$. Отсюда

$$A_0 = A - m \lg d; \quad B = B_0. \quad (5.3.-3)$$

Постоянство значений A_0 и B_0 из опытов в этих соотношениях указывает на согласованное изменение величин A и d . Иначе говоря, диаметр d в опытах оказывает влияние лишь на константу A . Возрастание значений параметра $T d^{-2}$ или $T_e d^{-2}$ с уменьшением давления в табл. 9 для малых диаметров и для больших диаметров происходит монотонно. Но при переходе от малых диаметров к большим имеется резкое падение значения \lg для данного параметра от 0,84 до 0,14. Это может быть объяснено различными влияниями: 1) масштабным фактором; 2) особенностями, имеющимися в естественном залегании пластов, когда применение размерностного анализа в данном виде является недостаточным и др.

Соотношение (5.3.-2) и табличные результаты относятся лишь к модели подобия, описывающей гидростройку. Они указывают на то, что эмпирические коэффициенты в (5.3.-2) и (5.3.-3) характеризуют акт откола осредненно, так как физический процесс нестационарен. В опасной точке (зоне), за время акта откола напряжение не строго постоянно и эффект его интегрального воздействия характеризует опытный осредняющий множитель при параметре p_0 . При такой постановке задачи вопрос о том,

в какой точке начинается и каким путем развивается процесс откола, по существу из рассмотрения исключается.

В уравнениях (5.3.-1) и (5.3.-3) значения A отрицательны и отсюда время разрушения очень мало. Оно гораздо короче, чем согласно данным [26], см. (3.2.-3). Так, прямая (5.3.-1), продолженная в область низких давлений даже при отсутствии нагрузки ($p_0 = 0, v_0 = 0$), дает значения долговечности порядка микросекунд. Отсюда, можно предполагать, что функции данного типа при малых нагрузках должны отклоняться в сторону больших значений долговечности. Это отмечается и в [26] для функции (3.2.-1).

С учетом результатов табл. 9 долговечность при разрушении струей можно представить в виде

$$T = T_0 \left(\frac{d}{d_n} \right)^m \exp \frac{U_0 - \gamma_w p_0}{R\theta}, \quad (5.3.-4)$$

где d_n, γ_w, U_0 — соответственно, линейный, объемный и энергетический параметры разрушения в рассматриваемой системе подобия для данного материала, в рамках феноменологической трактовки опытных результатов получают смысл физических констант; θ — формально введенная температура ($\theta = 300 \text{ K}$); параметр

$$\gamma_w = \frac{300 R B_0}{\lg e}$$

в качестве множителя при давлении p_0 характеризует усредненное во времени напряжение σ в некоторой критической точке $(z d^{-1})_{kp}, (\gamma d^{-1})_{kp}$ области концентрации, где оно определяет условие разрушения массива при данной нагрузке; величина γ_w может значительно изменяться в зависимости от выбора характерного давления p_0 и скорости v_n (наличие водяного буфера).

Другие два параметра U_0 и d_n в (5.3.-4) связаны зависимостью, при $m = 2$ имеющий вид

$$A = \lg T_0 + 2 \lg \left(\frac{d}{d_n} \right) + \frac{U_0 \lg e}{R\theta}, \quad (5.3.-5)$$

поэтому свободным является только один из них; независимо от того, какие согласованные значения A и d подставляются в (5.3.-5), величина U_0 определяется, если задано d_n . Поскольку в соотношении (5.3.-1) при $d = 1,12$ мм, $A = -4,6$, то учтя, что $T_0 = 10^{-14}$, $R = 8,3$ Дж/(К.моль), $(\lg e)^{-1} = 2,3$ и взяв $\theta = 300$ К, $(d d_n^{-1})^m = (d d_n^{-1})^2$, получим

$$U_0 = 5730 \left(8,4 - 2 \lg \frac{1,12}{d_n} \right). \quad (5.3.-6)$$

Это соотношение получено для каменноугольных образцов при диаметре струи от 1,12 до 3,5 мм. Но на условия подобия и соотношение (5.3.-4) значительное влияние могут оказывать: 1) масштабный фактор; 2) зависимость коэффициента объема β_w от диаметра d ; 3) вид потока, омывающего массив и др. Предположив, что функция $(d d_n^{-1})^m$ при продолжении в область диаметров струй, не меньших размера структурной ячейки породы, не меняется, его можно принять за d_n . Тогда, например, при $d_n = 0,112$ мм, условная величина энергетического параметра разрушения для угля в (5.3.-6) будет $U_0 = 10^4$ Дж/моль. Для промышленных диаметров струй, подставив в (5.3.-5) $d = 17,1$ мм, $A = -2,45$, то же самое значение $U_0 = 4,25 \cdot 10^4$ Дж/моль получим для кубасских углей при $d_n = 0,177$ мм; если же условно взять одинаковый размер структурного зерна $d_n = 0,112$ мм, то $U_0 = 4 \cdot 10^4$ Дж/моль.

Из соотношения (5.3.-5) непосредственно видно, см. также (5.3.-2), что при увеличении коэффициента объема β_w и размера d_n , величина U_0 растет. Для бетонных кубиков [11] при размере зерна 0,112 мм получается $U_0 = 5,65 \cdot 10^4$ Дж/моль. Эта величина меньше приведенного в работе [26] для цемента (марка не указана) значения начальной энергии активации при растяжении, равной энергии сублимации $U_c = 1,5 \cdot 10^5$ Дж/моль. При сдвиге (касательных напряжениях) начальная энергия активации может быть меньше и ближе к энергии самодиффузии.

Но все же значения энергетического параметра U_0 по сравнению с начальной энергией активации оказываются низкими; ввиду

логарифмических членов в соотношении (5.3.-5) коэффициент объема β_w и размер d_n на вычисляемые значения U_0 влияют слабо.

В частности, если коэффициент объема в (4.2.-4) и (5.2.-2) взять на порядок ниже, то значения U_0 получается меньше лишь примерно на 10%. Исходя из формул (4.2.-1), (4.2.-4) и (5.3.-2), можно получить выражение для выемочной производительности (разрушения):

$$\begin{aligned} \Pi &= A \cdot d_0^{3-m} \exp(B \cdot p_0), \\ A &= \beta_w \exp(-2,3 A_0); \\ B &= 2,3 B_0, \end{aligned} \quad (5.3.-7)$$

где A , B и m получаются непосредственно из экспериментов.

Заметим, что параметр d_n в (5.3.-4), связанный со структурой материала, согласуется с указанной в [21] необходимостью присутствия в зависимостях, определяющих процесс разрушения, некоторого характерного для данного вещества линейного размера.

При некотором обобщении полученных для откольной функции $T(\sigma)$ результатов, (5.3.-4) приводится к безразмерному виду [1]:

$$\ln \frac{T}{T_0} = m \ln \frac{L}{L_0} + \frac{U_0}{R\theta} - \frac{\sigma}{\chi \sigma_c}, \quad (5.3.-8)$$

где L и L_0 – характерные линейные размеры, соответственно воздействующего тела и среды; σ и σ_c – разрушающее динамическое и предельное статическое (см.п.5.5) напряжение; L_0 , $\chi(\theta)$, σ_c , m – эмпирические константы.

В формуле (5.3.-2) при $m = 2$, для каменного угля, приняв $U_0 = 4,25$ Дж/моль, $\chi \sigma_c = 20$ МПа, получим $L_0 = 6,75$ мм.

В случае отсутствия в задаче размера L , приняв за него параметр L_0 , в (5.3.-8) получим $\ln(L/L_0) = 0$.

Члены соотношения (5.3.-8) отдельно представляют собой безразмерные критерии разрушения, соответственно, временной, геометрический, термофлуктуационный и механический.

5.4. Квазистатическая задача ударного разрушения балки

В качестве примера квазистатической задачи возьмем случай аварии простейшей металлической конструкции, ранее рассчитанной на прочность.

Рассмотрим симметричную задачу разрушения грузом массой m , падающим с высоты h балки из железа (α) [6], свободно опертой на две опоры; пролет балки l , высота ее прямоугольного сечения $2a$; ширина b , модуль упругости E .

Из уравнения колебания груза на балке имеем

$$\ddot{x} + c_* m^{-1} x = 0,$$

где

$$c_* = 32 E b a^3 l^{-3}.$$

Принимая, что координата x по середине балки отсчитывается от ее равновесного положения с прогибом δ_0 под грузом $m g$, начальные условия для времени $t = 0$, записываем в виде

$$x_0 = -\delta_0 = -m g c_*^{-1}, \quad \dot{x}_0 = V_0 = \sqrt{2gh}. \quad (5.4-1)$$

Решая, получим

$$x = -\delta_0 \cos(k t) + V_0 k^{-1} \sin(k t), \quad (5.4-2)$$

где

$$k = \sqrt{c_* m^{-1}},$$

причем прогибы балки по середине будут

$$\delta = \delta_0 + x. \quad (5.4-3)$$

После первого периода колебания балки – интервала времени T_k – амплитуды быстро затухают; поэтому при расчете по предельной теории исходят, как в статике ($h = 0$), обычно из того, что разрушение балки происходит при соответствующем максимальном изгибающем моменту наибольшем прогибе, см. соотношения (5.4.-1), (5.4.-2). (5.4.-3),

$$\delta = \delta_0 + \sqrt{2\delta_0 h},$$

который наступает в момент времени $t_0 = 0,25 T_k$ (четверть периода).

Тогда напряжение в наиболее удаленном от нейтральной оси волокне сечения балки в ее середине

$$\sigma = \frac{12 E a \delta_m}{\ell^2} = \sigma_0 + \sigma_m = \frac{3 m g \ell}{8 b a^2} + \sqrt{\frac{9 E A_v}{\ell b a}}, \quad (5.4.-4)$$

где σ_0 и σ_m — статическая и динамическая компоненты напряжения, а работа подающего груза A_v .

Из уравнения (5.4.-4) для предельного напряжения $\sigma = \sigma_c$ находится высота h (либо масса m) при заданных остальных величинах, откуда работа разрушения балки $A_v = m g h$.

При этом особенность предельной постановки динамической задачи, в отличие от статической, состоит лишь в том, что в ней фактически задается время разрушения балки $T = t_0 = 0,25 T_k$, не входящее в (5.4.-4), о чем в теории умалчивается, и никаких оценок этому не дается.

Представим ту же задачу на основе кинетической теории прочности. Поскольку напряжение в балке при ее колебании меняется, введем в качестве исчерпаемости ресурса долговечности интеграл накопления повреждений (3.2.-6).

Принимая, что разрушение определяется напряжением в том же, что и по предельной теории, месте балки, с учетом (3.2.-1) получим

$$10^{13} \int_0^T \exp\{M [1 - \cos(k t) + N \sin(k t)] - U_0 (R\theta)^{-1}\} dt,$$

$$\left[M = \gamma \sigma_0 (R \theta)^{-1}, N = V_0 (k \delta_0)^{-1} \right].$$

Из этого уравнения время разрушения T при остальных заданных величинах может быть найдено путем суммирования подинтегральной функции до тех пор, пока верхний предел интеграла T не удовлетворяет

условию (3.2.-6). При заданном T путем перебора значений можно найти h .

Таблица 10

Затрата энергии на разрушение балки

Расчетная теория	T , с	σ , МПа	δ_m , см	h , см	A_v , Дж
Предельная	10^2	332.5	2.23	1.25	18.8
Кинетическая	0.044	390	2.60	2.10	31.0

Количественное сопоставление двух теорий прочности иллюстрируется в табл. 10 на примере балки со следующими данными: $\ell = 2,0$ м; $b = 0,015$ м; $a = 0,025$ м; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; масса груза $m = 150$ кг; при этом $k = 35,5 \text{ с}^{-1}$; $\delta_0 = 0,8$ см; $t_0 = 0,044$ с; $\sigma_0 = 120$ МПа и при $\sigma_c = 332,0$ МПа $\sigma_m = 212,0$ МПа. В расчете по кинетической теории, как и по предельной, разрушение приурочено к времени t_0 , хотя можно принимать и $T \neq t_0$. Согласно табл. 10 оценка, на основе кинетической теории, показывает, что полученная по предельной теории высота 1,25 см и энергия 18,8 Дж недостаточны для разрушения балки. За время четверти периода $t_0 = 0,25$, $T_k = 0,044$ с напряжения не могут развиваться до 332,0 МПа, для этого требуется время $T = 10^2$ с, за которое колебания успевают затухнуть, а в равновесном положении от груза $m = 150$ кг, напряжение в опасном сечении будет 118 МПа; т.е. балка прочна с коэффициентом запаса $332/118 = 2,8$. Для разрушения балки требуется 31 Дж, т.е. в данном примере на 65% больше, чем по предельной теории. При этом все же надо иметь в виду приближенность расчета. В приведенном расчете для невесомой балки влияние ее веса можно учесть множителем, равным 1,49 по Релею.

Резюмируя полученные данные, можно отметить несовершенство предельной теории прочности, требующей неопределенных запасов при расчетах разрушения ударом, в квазистатических задачах.

5.5. Характеристики кратковременного сопротивления разрушению

В тех случаях, когда в промышленной технологии используется оборудование для выемки твердых тел или для их разрушения, в технические расчеты вводятся обычно три показателя. Первый из них определяет силовое воздействие, необходимое для преодоления

сопротивления тела распаду, например, усилие резания, временное одноосное напряжение σ_c , гидромониторное давление и др. Обозначим их, обобщая в дальнейшем через σ .

Другим важным показателем является выемочная производительность Π – объем выемки в единицу времени, оценивающий продуктивность труда.

Третий используемый показатель представляет собой затраченную на единицу объема выемки энергию – энергоемкость \mathcal{E} . В отличие от твердосплавного резца или ударника, которые при внедрении в тело совершают лишь работу деформации, энергия, затраченная на хрупкое разрушение струей, не может быть найдена по упругим характеристикам.

Здесь коренится основная разница между процессами гидравлического и механического разрушения, суть которой в том, что затраченная струей энергия не равна полезной работе деформации тела. Их отличие возможно на любой порядок и не связано с диссипацией в объеме разрушения, так как энергия струи гасится трением при растекании по всей поверхности. В технологических расчетах при гидродобыче используется энергоемкость \mathcal{E} , найденная по мощности, израсходованной струей N и производительности Π , см. формулу (4.2.-3).

Эта энергоемкость, как и производительность разрушения струей Π , зависит не только от ее параметров и прочности материалов; на объем гидравлического разрушения сильно влияет фактор скорости V_{Π} скольжения – перемещения центра давления по обрабатываемой поверхности, см. п.4.2.

Скорость скольжения струи, отвечающая минимуму энергоемкости, является оптимальной. Она рассматривается как одна из характеристик материала, не имеющая аналога по своим физическим особенностям в прочностных задачах, а также и при механическом разрушении.

Практически, в каждом случае, оптимальная скорость скольжения струи находится экспериментально, по точке минимума кривой энергоемкости (см. рис.3). С ростом прочности материала ее экстремум смещается в сторону меньших скоростей скольжения (влево). Это связано с тем, что лунка под струей в более прочной среде углубляется медленнее.

Такое же смещение оптимума влево происходит при уменьшении диаметра струи.

Особый подход при разрушающих технологиях требуется к прочностным характеристикам материалов. При контактном взаимодействии не всегда можно пользоваться предельными (статическими) характеристиками. При динамическом разрушении необходимы кинетические характеристики типа (3.2.-3).

В условиях откольного разрушения для опытного определения зависимости долговечности T от σ при заданных размерах контактирующихся тел, формулу (5.2.-2) можно представить в виде

$$T(\sigma) = \frac{W_0}{\Pi(\sigma)}. \quad (5.5.-1)$$

Объем одноактной выемки W_0 в (5.5.-1) не зависит от σ , поскольку большинство опытов показывает, что на W_0 влияют только геометрические размеры. Вместо долговечности T в качестве параметра (на равных основаниях) в кинетическую характеристику (5.3.-1) может включаться производительность Π , см.(5.3.-7). Возможна также подстановка в (5.3.-1) вместо напряжения σ скорости удара V_0 , если связь между ними легко устанавливается [4].

В опытах [26] нагрузка осуществлялась скачком и считалась постоянной, т.е. не учитывался интервал времени нестационарности процесса нагружения. Аналогичный начальный интервал для параметра t^* имеется в табл.1. Пренебрежение нестационарностью в этих случаях связано с тем, что напряжения, в пределе, быстро стабилизируются на статических значениях, вносящих основной вклад в процесс разрушения. Но в квазистатической задаче п.5.4 напряженно деформированное состояние все время нестационарно и поэтому необходимо было использование интеграла (3.2.-6).

Заметим, что имеющийся ныне для динамических расчетов объем экспериментальных данных еще невелик. При этом, для перехода от них к производственным условиям необходим учет масштабного фактора. Так, для гидроотбойки, при сопоставлении данных, полученных в лаборатории и в промышленных условиях, возникает вопрос о влиянии резко отличающихся по величине диаметров сопел; при таком переходе в табл. 9 видно, что возраставший с падением давления параметр $\lg T_c d^{-2}$ упал с 0,84 до 0,14 с / м², т.е. общая закономерность оказалась нарушенной. Заметим также, что в добычной промышленности для лабораторий минеральное сырье отбирается из горного массива (пласта) для изготовления образцов с более или менее однородными свойствами. В рудниках данные испытаний на прочность получают для массивов в естественных условиях, при глубоком залегании полезного ископаемого с другими породами, с посторонними, в том числе иноагрегатными включениями.

Заметим, что при сопоставлении разных материалов по их прочности кинетическими характеристиками в виде (5.3.-1) или (5.3.-4) пользоваться неудобно.

Особенно важно бывает знать нижний предел силового фактора σ_c при разрушении.

Например, эксперименты показывают, что производительность гидроотбойки при давлении, близком к половине предела прочности на одноосное сжатие, практически падает до нуля [31].

Такое давление $p_c \approx 0,5 p_0$, рассматриваемое как минимальное разрушающее, отождествляется с нагрузкой, соответствующей пределу прочности материала. Точнее в данном случае надо говорить о некотором диапазоне давлений, в области которых долговечность круто возрастает и разрушение делается неустойчивым, резко зависящим от неоднородности материала. В п.2.3, см. формулу (2.3.-9), указана точка, в которой при статическом давлении струи на поверхности полупространства (при $\nu = 0,3$) имеется максимум наибольших касательных напряжений $\tau = 0,268 p_0$; временное сопротивление на скалывание для большинства хрупких материалов $\tau_c \approx (0,11 - 0,15) \sigma_c$ [27]. Отсюда, при отколе получается приведенное выше $p_c \approx 0,5 p_0$.

Таким образом, представление о пределах прочности можно связывать с указанной областью резкого возрастания долговечности на кинетических характеристиках типа (5.3.-4).

Тогда, предельное статическое напряжение σ_c , имеющееся в нормативной литературе и указываемое в составе аббревиатуры, маркирующей качество материала (например, цемента), при динамических процессах сохраняется в качестве критерия для проектных экспресс оценок, см. также (5.3.-8).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Асатур К.Г., Размерностный анализ в кинетической концепции прочности // Симпозиум "Торное оборудование, переработка минерального сырья, новые технологии, экология", /Санкт-Петербургский горный институт 1996. с.8—9.
2. Асатур К.Г. Влияние трения в пограничном слое у забойной поверхности на эффективность разрушения при гидроотбойки // Изв.вузов. Горн.журн. 1978. №2, с.17—21.
3. Асатур К.Г. Волновой процесс при нагружении упругого полупространства давлением струи // Изв. вузов. Горн.журн. 1981. №1, с.8—13.
4. Асатур К.Г. Механика разрушения горных пород высоконапорными струями // Ленинградский горный ин-т. Л., 1985, 84 с.
5. Асатур К.Г. Вариационный метод решения динамической задачи для упругого полупространства // Зап. ЛПИ, 1988, Т. 117. с.19—25.
6. Асатур К.Г. Сравнение предельной и временной теорий прочности при ударе // Проблемы прочности. Международный научно-технический журнал. /АН Украины. 1993, №8, с.53—58.
7. Асатур К.Г. Напряжения при импульсивном разрушении тел // Новые технологии добычи полезных ископаемых. Горные машины: Международный симпозиум по проблемам прикладной технологии, горной науки и производства / Санкт-Петербургский горный ин-т, 1993. с.3—8.
8. Асатур К.Г., Маховиков Б.С., Дорошенко И.И., Готлиф А.А. Расчет на ЭВМ методом конечных элементов напряжений в массиве при резании // Зап. ЛПИ, 1991. Т.128, с.3—6.
9. Асатур К.Г., Огурцов К.И. Сравнение приближенного и точного решений при динамическом приложении силы на границе упругого полупространства от струи //Межвузовский сборник Эксплуатация шахтных стационарных установок. Пермь, 1978, с.102—108.
10. Асатур К.Г., Северин Л.П. Опытные данные по энергоемкости процесса гидроотбойки минеральных ископаемых // Изв. вузов. Горн. журн., 1973, №11, с.28—31.
11. Ахмадеев Н.Х. Динамическое разрушение твердых тел в волнах напряжений. /Уфимское отделение АН СССР, 1988, 54 с.
12. Бреннер В.А., Жабин А.Б., Лавит И.М., Мерзляков В.Г., Теоретические описание гидромеханического резания горных пород // Проблемы и перспективы развития горной техники. Горные машины и оборудование: Международный семинар / Московский государственный горный университет, 1996,с.37—44.
13. Журавский А.М. Основные задачи теории разрушения угля струей воды // Зап. ЛПИ, 1959. Т 41, вып. 1, с.94—105.

14. Журков С.Н. Кинетическая концепция прочности твердых тел // Изв. АН СССР. Неорганические материалы. 1967, Т. 3, №10, с.1767—1776.
15. Климова Д.Н., Огурцов К.И. Об условиях приемлемости квазистатических решений при динамических воздействиях на границе упругого полупространства. Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1970, №6, с.84—89.
16. Колмогоров В.Л., Мигачев Б.А., Бурдуковский В.Г. Феноменологическая модель накопления повреждений и разрушения при различных условиях нагружения / Ин-т машиноведения Уральского отд. РАН, Екатеринбург, 1994.
17. Лабазин В.Г. Напряженное состояние и условия разрушения горного массива при статически приложенной нагрузке // Зап. ЛПИ, 1959. Т.41, вып.1, с. 106—118.
18. Лаврентьев М.А. Кумулятивный заряд и принцип его работы. // Успехи математических наук, 1957, Т. 12, вып.4, с. 41—56.
19. Никифоровский В.С., Шемякин Е.И. Динамическое разрушение твердых тел. Новосибирск :Наука, 1979, 271 с.
20. Никонов Г.П., Кузьмич И.А., Ишук И.Г., Гольдин Ю.А. Научные основы гидравлического разрушения угля. Москва : Наука, 1973, 147 с.
21. Новожилов В.В. К основам равновесных трещин в хрупких телах // Прикладная математика и механика, 1969, Т. 33, вып.5, с. 795—812.
22. Огурцов К.И., Петрашень Г.И. Динамические задачи для упругого полупространства в случае осевой симметрии // Ученые записки ЛГУ, 1951, вып. 24, №149, с. 3—117.
23. Павлова Н.Н., Шрейнер Л.А. Разрушение горных пород при динамическом нагружении. М.: Недра, 1964, 160 с.
24. Паргон В.З., Борисковский В.Г. Динамика упругого хрупкого разрушения. М.: Машиностроение, 1988, 239 с.
25. Петрашень Г.И., Марчук Г.И., Огурцов К.И. О задаче Лемба в случае полупространства. // Ученые записки ЛГУ, 1950, вып.21, №135, с.71—118.
26. Регель В.Р., Слуцкер А.И., Томашевский Э.С. Кинетическая природа прочности твердых тел. М.: Наука, 1974, 560 с.
27. Ржевский В.В., Новик Г.Я. Основы физики горных пород. М.: Недра, 1978, 359 с.
28. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 2, М.: Наука, 1976, 584 с.
29. Смирнов В.И., Соболев С.Л. О применении нового метода к изучению упругих колебаний в пространстве при наличии осевой симметрии. // Труды сейсмологического института АН СССР, 1932, №20, с.1—37, 1933, №29, с.1—49.
30. Тимошенко С.П. Теория упругости. Перевод с англ. Л.-М.: ОНТИ, 1934, 451 с.
31. Цяпко Н. Ф., Чапка А.М. Гидроотбойка угля на подземных работах. М.: Госгортехиздат, 1960, 312 с.
32. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука. 1974, 640 с.
33. Шрейнер Л.А. Физические основы механики горных пород. М.: Гостоптехиздат, 1950, 211с.
34. Cagniard L, Reflexion et refraction des ondes seismiques progressives, Paris, Goutier-Villars, 1939, P.11—53.

35. Kaltzoff J.F., Shockey D.A., Instability of cracks under impulse loads // Journal of applied physics, 1977, 48, №3. P.986—993.
36. Shockey D.A., Erlich D.C., Homma H, Short - Pulse fracture mechanics, 1986, 23, №1, P.311—319.

Книжничка "Содержание"
Механика деформации и разрушения
Исследования в области механики деформации и разрушения
Том 10, №1, 1986 г. 120 с.
Цена: 1 руб. 50 коп. (в т.ч. 1 руб. 10 коп.)

12. Kaitani J.R., Shookry G.A. Reliability of cracks under impact loads // Journal of applied physics, 1977, no. 48, p. 1028-1032.

13. Shookry G.A., Kaitani J.R., Thomas H., Shookry G.A. Fatigue crack growth // Applied physics, 1977, no. 48, p. 1033-1037.

14. Kaitani J.R., Shookry G.A. Fatigue crack growth // Applied physics, 1977, no. 48, p. 1038-1042.

15. Kaitani J.R., Shookry G.A. Fatigue crack growth // Applied physics, 1977, no. 48, p. 1043-1047.

16. Kaitani J.R., Shookry G.A. Fatigue crack growth // Applied physics, 1977, no. 48, p. 1048-1052.

17. Kaitani J.R., Shookry G.A. Fatigue crack growth // Applied physics, 1977, no. 48, p. 1053-1057.

18. Kaitani J.R., Shookry G.A. Fatigue crack growth // Applied physics, 1977, no. 48, p. 1058-1062.

19. Kaitani J.R., Shookry G.A. Fatigue crack growth // Applied physics, 1977, no. 48, p. 1063-1067.

20. Kaitani J.R., Shookry G.A. Fatigue crack growth // Applied physics, 1977, no. 48, p. 1068-1072.

21. Kaitani J.R., Shookry G.A. Fatigue crack growth // Applied physics, 1977, no. 48, p. 1073-1077.

22. Kaitani J.R., Shookry G.A. Fatigue crack growth // Applied physics, 1977, no. 48, p. 1078-1082.

23. Kaitani J.R., Shookry G.A. Fatigue crack growth // Applied physics, 1977, no. 48, p. 1083-1087.

24. Kaitani J.R., Shookry G.A. Fatigue crack growth // Applied physics, 1977, no. 48, p. 1088-1092.

25. Kaitani J.R., Shookry G.A. Fatigue crack growth // Applied physics, 1977, no. 48, p. 1093-1097.

26. Kaitani J.R., Shookry G.A. Fatigue crack growth // Applied physics, 1977, no. 48, p. 1098-1102.

27. Kaitani J.R., Shookry G.A. Fatigue crack growth // Applied physics, 1977, no. 48, p. 1103-1107.

28. Kaitani J.R., Shookry G.A. Fatigue crack growth // Applied physics, 1977, no. 48, p. 1108-1112.

29. Kaitani J.R., Shookry G.A. Fatigue crack growth // Applied physics, 1977, no. 48, p. 1113-1117.

Константин Георгиевич Асатур
Механика динамического разрушения

Научное издание

Ответственный за выпуск к.т.н. Ахметшин И.Х.

Формат 60×90¹/₁₆. Уч.-изд. л. 6 Тираж 300.

Лицензия №020355 от 30.12.96

Санкт-Петербургский ин-т им. Г.В.Плеханова

5594